



ACADEMIA ROMÂNĂ  
SCOSAAR

# HABILITATION THESIS

**Moduli spaces and their fundamental groups:  
homology, representations and lower central series**

**Martin Palmer-Anghel**

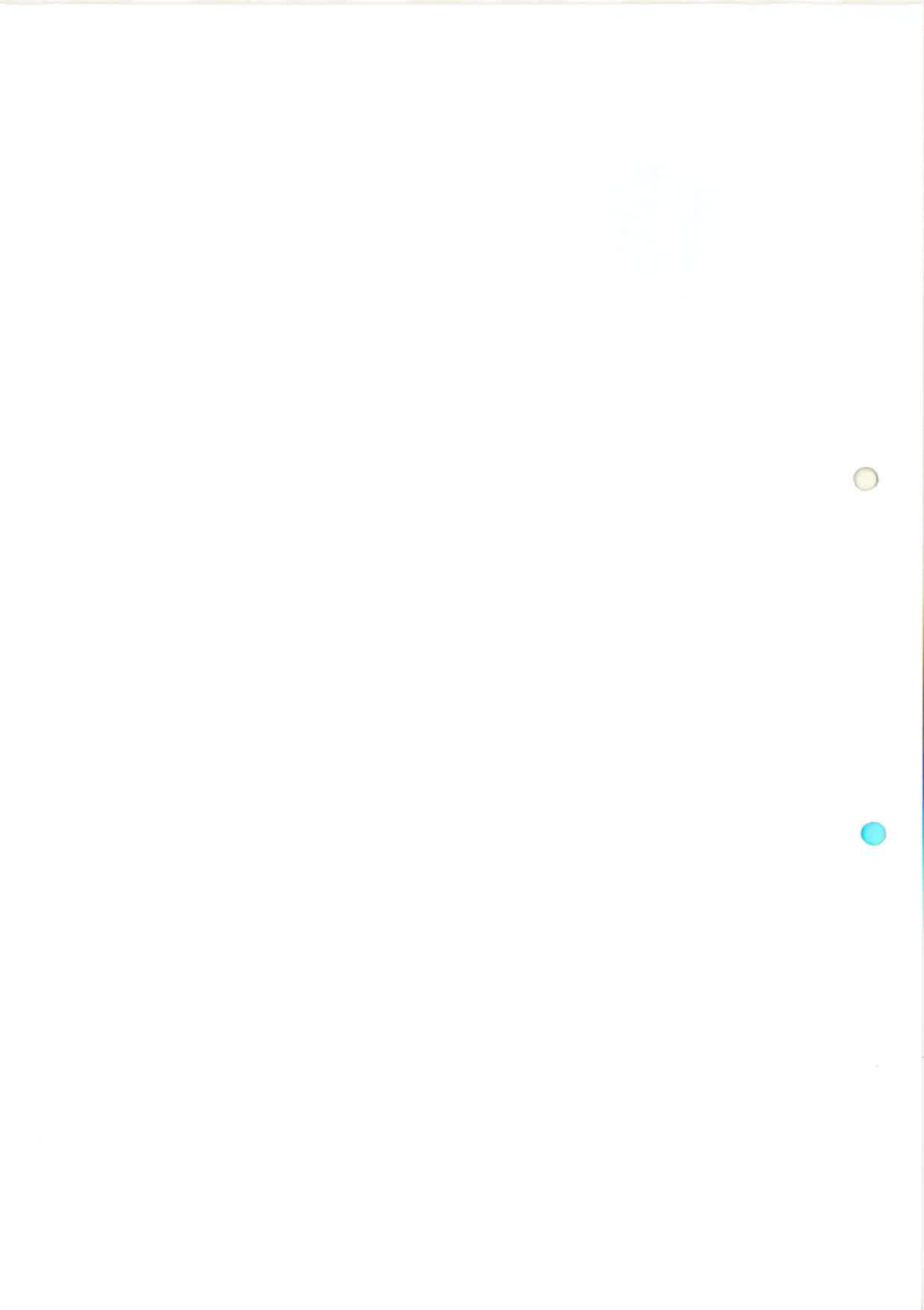
## REZUMAT

**Domeniul fundamental: Matematică și științe ale naturii**

**Domeniul de abilitare: Matematică**

Teză elaborată în vederea obținerii atestatului de abilitare în scopul conducerii lucrărilor de doctorat în domeniul Matematică

BUCUREȘTI, 2024



# Rezumat

Scopul global al cercetării mele de până acum a fost de a înțelege topologia spațiilor de moduli prin invarianți algebrici, în primul rând omologie și grupuri fundamentale. Această teză prezintă șase rezultate diferite, trei se referă la omologia spațiilor de moduli și trei se referă la studierea grupurilor fundamentale ale spațiilor de moduli (*grupuri de deplasări și grupuri mapping class*) prin reprezentările lor și seriile lor centrale descendente.

În capitolul preliminar 0, ofer mai întâi o scurtă prezentare generală a principalelor mele rezultate de cercetare de după teza mea de doctorat. Capitolele 1–6 formează apoi partea principală a tezei și dezvoltă șase dintre aceste rezultate în detaliu.

Capitolul 1 demonstrează stabilitatea omologică pentru două variante diferite de spații de moduli ale monopolurilor asimptotice, și anume spațiile de moduli ale *monopolurilor Dirac cu framing* și spațiile de moduli ale *monopolurilor ideale*. Primele sunt fibrați în toruri *Gibbons-Manton* peste spații de configurații, iar cele din urmă sunt obținute din ele prin înlocuirea fiecărui factor circular al fibrei cu un spațiu de moduli ale monopolurilor prin construcția Borel. Ele sunt hipersuprafețe limită într-o compactificare parțială a spațiilor clasice de moduli ale monopolurilor. Aceste rezultate rezultă dintr-un rezultat general de stabilitate omologică pentru spațiile de configurații echipate cu date non-locale (*spații de configurații non-locale*). Acest capitol corespunde unei lucrări comune cu U. Tillmann [Til23] publicată în *Proceedings of the Royal Society A*.

S-a demonstrat în [Til16] că spațiile de moduli ale varietăților cu puncte marcate sunt omologic stabile când numărul de puncte marcate tinde la infinit. Capitolul 2 generalizează acest rezultat la *spații de moduli ale varietăților cu singularități conice*. (Punctele marcate pot fi considerate a fi singularități conice neesențiale, deoarece o vecinătate de disc a unui punct marcat este conul sferei sale de limită.) Acest lucru este dedus ca un caz special al unui rezultat de stabilitate omologică mai general pentru spațiile de clasificare ale *grupurilor de difeomorfisme simetrice* de varietăți, în raport cu *suma conexă parametrică*, o operație care generalizează suma conexă obișnuită și chirurgia (inclusiv chirurgia Dehn).

Cheia pentru demonstrarea acestui rezultat este stabilitatea omologică pentru *spații de moduli ale subvarietăților*, când numărul de componente conexe ale subvarietăților tinde la infinit, ceea ce a fost demonstrat în teza mea de doctorat și publicat în [Pal21]. Relația cu singularitățile conice este dată de colapsarea vecinătăților tubulare ale subvarietăților la puncte izolate. Rezultatele capitolului 2 corespund preprintului [Pal18a], care este trimis spre publicare.

Capitolul 3 se referă la “big mapping class groups”, adică grupuri mapping class de *suprafețe de tip infinit* și corespunde unei lucrări comune cu X. Wu [Wu22a] acceptat pentru publicare în *Documenta Mathematica*. În acest capitol demonstrăm că, pentru orice suprafață de tip infinit  $S$ , omologia integrală a închiderii grupului mapping class cu suport compact  $\text{PMap}_c(S)$  și a grupului Torelli  $\mathcal{T}(S)$  este nenumărabilă în fiecare grad pozitiv. După rezultatele noastre anterioare în [Wu22b] și alte calcule cunoscute, o astfel de afirmație nu poate fi adevărată pentru *întregul* grup mapping class  $\text{Map}(S)$  pentru *toate* suprafețe  $S$  de tip infinite. Cu toate acestea, demonstrăm că omologia integrală a lui  $\text{Map}(S)$  este nenumărabilă în toate gradele pozitive pentru o clasă mare de suprafețe de tip infinit  $S$ . Proprietatea cheie a acestei clase de suprafețe este, aproximativ, că spațiul capetelor suprafeței  $S$  conține un punct limită de puncte distinse topologic. Acest rezultat include în special fiecare suprafață de gen finit al cărei spațiu de capete este numărabil și are un punct unic de rang Cantor-Bendixson maxim  $\alpha$ , unde  $\alpha$  este un ordinal succesiv.

Înțelegerea *seriei centrale descendente* a unui grup este, în general, o problemă dificilă. Pe de altă parte, calcularea seriei centrale descendente și a algebrelor Lie asociate ale unui grup sau ale unora dintre subgrupurile sale poate duce la o înțelegere profundă a structurii de bază a acelui grup. Scopul capitolului 4 este de a prezenta mai multe tehnici care vizează realizarea unei părți a acestei probleme. În special, căutăm să răspundem la următoarea întrebare: *când se oprește seria centrală descendentă?* Introducem mai multe tehnici pentru a răspunde la această întrebare, pe care apoi le aplicăm *grupurilor braid partiționate pe suprafețe* pentru orice suprafață și pentru orice partiție. Calea de la tehnicile noastre generale până la aplicarea lor este departe de a fi simplă și este necesară o anumită tenacitate pentru a rezolva toate cazurile întâlnite pe parcurs. În cele din urmă ajungem la un răspuns la întrebarea noastră pentru fiecare dintre aceste grupuri, cu singura excepție a unei familii de grupuri braid partiționate pe planul proiectiv. Într-un număr de cazuri, chiar calculăm complet seria centrală descendentă. Acest capitol corespunde unei părți a monografiei [DPS22b], împreună cu J. Darné și A. Soulié, care este acceptată pentru publicare în *Memoirs of the American Mathematical Society*.

În continuare, trecând de la seria centrală descendentă la *reprezentări* grupurilor de deplasări, în capitolul 5 oferim o construcție topologică simplă a reprezentărilor Bureau ale grupurilor *loop-braid*. Există patru versiuni: definite fie pe grupurile *loop-braid* neextinse, fie pe grupurile *loop-braid* extinse, iar în fiecare caz există o versiune neredusă și una redusă. Trei nu sunt surprinzătoare și s-ar putea ghici cu ușurință matricele corecte de atribuit generatoarelor. Al patrulea este mai subtil și nu pare evident din punct de vedere combinatoriu, deși este foarte natural din punct de vedere topologic. Acest capitol corespunde unei lucrări comune cu A. Soulié [PS22a] publicată în *Comptes Rendus Mathématique*.

Capitolul 6 se ocupă de construirea reprezentărilor omologice ale grupurilor mapping class de suprafețe și corespunde unei lucrări comune cu C. Blanchet și A. Shaukat [BPS23] acceptate pentru publicare în *Contemporary Mathematics*. În lucrările anterioare cu aceiași coautori [BPS21], am construit reprezentări twistate ale grupurilor mapping class de suprafețe, în funcție de alegerea unei reprezentări  $V$  a grupului Heisenberg  $\mathcal{H}$ . Pentru anumite  $V$  am arătat cum aceste reprezentări ale grupurilor mapping class pot fi de-twistate. În acest capitol, studiem restricțiile reprezentărilor noastre twistate la diferite subgrupuri ale grupului mapping class. Demonstrăm în special că aceste reprezentări pot fi de-twistate pe *grupul Torelli* pentru orice reprezentare  $V$  a lui  $\mathcal{H}$ . În cazul în care  $V$  este reprezentarea Schrödinger, construim de asemenea reprezentări ne-twistate ale subgrupurilor definite ca nuclee de homomorfisme încrucișate studiate de Earle și Morita.

În capitolul final F, descriu diverse probleme și întrebări deschise legate de subiectele tezei, dintre care unele sunt imediat abordabile, iar altele sunt foarte dificile.