



ACADEMIA ROMÂNĂ  
SCOSAAR

# HABILITATION THESIS

Period polynomials of modular forms and applications

Alexandru-Anton Popa

## REZUMAT

**Domeniul fundamental:** Matematică și științe ale naturii

**Domeniul de abilitare:** Matematică

Teză elaborată în vederea obținerii atestatului de abilitare în scopul conducerii lucrărilor de doctorat în domeniul Matematică

BUCUREȘTI, 2023



În această teză de abilitare am colectat câteva rezultate din teoria polinoamelor de perioade asociate formelor modulare, obținute împreună cu colaboratorii mei în ultimii zece ani.

Se cunoaște încă din lucrările fundamentale ale lui Eichler și Shimura din anii 1970 că spațiul de forme modulare de pondere  $k$  pentru un subgrup de congruență  $\Gamma$  este legat de coomologia parabolică a lui  $\Gamma$ , cu coeficienți în modulul polinoamelor omogene în două variabile de grad  $k - 2$ . Spațiul de polinoame de perioade reprezintă o realizare concretă a primului grup de coomologie parabolică, care este deosebit de potrivită pentru a înțelege acțiunea operatorilor Hecke asupra formelor modulare.

În **Capitolul 1**, trec în revistă rezultatele obținute împreună cu V. Pașol în [Proc. London Math. Soc., 2013]. Arătăm că lucrările anterioare ale lui Y. Manin [Mat. Sb., 1973], K. Haberland [Math. Nachr., 1983] și W. Kohnen și D. Zagier [Modular forms, ed. R.A. Rankin, 1984] privind perioadele formelor modulare pentru grupul modular se generalizează la subgrupurile de congruență. Teoria polinoamelor de perioadă pe care o dezvoltăm este duală față de teoria mai bine cunoscută a simbolurilor modulare, dar este mai potrivită pentru anumite aplicații, deoarece polinoamele de perioadă sunt direct legate de clasele de cohomologie. De exemplu, definim polinoame de perioadă extinse ale formelor modulare arbitrare (nu neapărat cuspidale) și o împerechere pe spațiul polinoamelor de perioade extinse care corespunde produsului scalar Petersson al formelor modulare, generalizând și rafinând o formulă a lui Haberland.

În **Capitolul 2**, arătăm că împerecherea pe spațiul extins de polinoame de perioade este nedegenerată, și corespunde unui produs Petersson de forme modulare arbitrare. Aceste rezultate au fost publicate împreună cu V. Pașol în [Proc. Amer. Math. Soc., 2014].

În **Capitolul 3**, aplic teoria polinoamelor de perioadă pentru a da generalizări ale faimoasei congruențe a lui Ramanujan la formele modulare de nivel prim. Acest rezultat a fost publicat împreună cu R. Gaba în [J. Number Theory, 2018].

O aplicație a polinoamelor de perioadă pe care am realizat-o într-o serie de trei lucrări se referă la formula de urmă pentru operatorii Hecke pe spațiul formelor modulare pentru  $SL(2, \mathbb{Z})$  și subgrupurile sale de congruență. Am colectat aceste rezultate în **Capitolul 4**. În secțiunea 4.1, schițez o demonstrație elementară și în întregime algebrică a formulei de urme pentru grupul modular dată împreună cu D. Zagier în [J. reine angew. math., 2020]. În secțiunea 4.2, extind această abordare la subgrupurile de congruență, adunând rezultatele din două lucrări apărute în [Proc. Amer. Math. Soc., 2018] și [Res. Math. Sci., 2018]. Obțin formule de urme pentru o combinație de operatori Hecke și Atkin-Lehner care acționează asupra formelor modulare pentru subgrupuri de congruență, care sunt printre cele mai simple și mai generale din literatura foarte bogată.

În **Capitolul 5**, am adunat două formule care rafinează combinatorial relația Kronecker-Hurwitz pentru numerele de clasă, obținute împreună cu D. Zagier în [Proc. Amer. Math. Soc., 2017] și în ultima secțiune din [J. reine angew. math., 2020]. În secțiunea 5.2, prezint o nouă demonstrație, mai directă, a celei de-a doua astfel de formule, în același spirit cu argumentul prezentat în [Proc. Amer. Math. Soc., 2017].

În **Capitolul 6**, prezint câteva probleme deschise care decurg natural din rezultatele prezentate în această teză.