



ACADEMIA ROMÂNĂ
SCOSAAR

REZUMATUL TEZEI DE ABILITARE

TITLUL: The Analysis of Some Classes of Nonlinear PDEs

Domeniul de abilitare: MATEMATICĂ

Autor: STANCU-DUMITRU Denisa

Teză elaborată în vederea obținerii atestatului de abilitare în scopul conducerii lucrărilor de doctorat în domeniul MATEMATICĂ.

București, 2021

Stancu

TEZĂ DE ABILITARE – REZUMAT

TITLU: The Analysis of Some Classes of Nonlinear PDEs

Domeniu de abilitare: Matematică

Autor: STANCU-DUMITRU Denisa

Această teză de abilitare este dedicată studiului unor clase de ecuații cu derivate parțiale de tip neliniar. O ecuație cu derivate parțiale este o relație ce conține derivatele parțiale ale unei funcții necunoscute de cel puțin 2 variabile independente. Studiul ecuațiilor cu derivate parțiale provine din secolul al optsprezecelea și reprezintă rezultatul analizei analitice a numeroase modele fizice (a se vedea lucrările lui Leonhard Euler, Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, Joseph-Louis Lagrange, Gaspard Monge, Pierre-Simon Laplace, Augustin-Louis Cauchy, Carl Gustav Jacob Jacobi, William Rowan Hamilton). De la mijlocul secolului al nouăsprezecelea (a se vedea, de exemplu, lucrările lui Georg Friedrich Bernhard Riemann, Henri Poincaré, David Hilbert), ecuațiile cu derivate parțiale au devenit un instrument esențial în studierea unor probleme din anumite ramuri ale matematicii. Principalele idei legate de aplicațiile ecuațiilor cu derivate parțiale au fost inițial expuse de Henri Poincaré în lucrarea sa *Sur les Équations aux Dérivées Partielles de la Physique Mathématique* [20]. Deși originea ecuațiilor cu derivate parțiale neliniare este veche, investigarea acestor ecuații a devenit un domeniu independent ce a fost extins în multe direcții de cercetare în a doua jumătate a secolului al douăzecilea. Ecuațiile cu derivate parțiale neliniare apar în problemele din chimie sau biologie, în formularea unor legi fundamentale ale naturii, în diverse domenii ale fizicii, matematicii aplicate sau inginerie, precum acustica, dinamica fluidelor, mecanica solidelor, optica neliniară, fizica plasmei, teoria câmpului cuantic. Studiul ecuațiilor cu derivate parțiale neliniare este o sarcină extrem de dificilă deoarece nu există o metodă generală pentru rezolvarea unor astfel de ecuații. Fiecare problemă sau ecuație este unică datorită "neliniarității" sale și de aceea trebuie căutate permanent noi metode pentru a rezolva cel puțin o clasă de ecuații cu derivate parțiale neliniare. Pentru mai multe detalii privind istoria și dezvoltarea studiului ecuațiilor cu derivate parțiale amintim lucrarea lui H. Brezis & F. Browder [3].

Scopul principal al acestei teze de abilitare este de a prezenta și a analiza diverse clase de ecuații cu derivate parțiale neliniare, ce reflectă principalele contribuții științifice ale autoarei obținute în ultimii ani după susținerea tezei de doctorat [21] (în Septembrie 2012). Ne vom concentra atenția pe aspectele teoretice legate de câteva clase de ecuații cu derivate parțiale cu scopul auxiliar de a sublinia proprietățile importante ale soluțiilor acestor ecuații precum buna-definire, existența sau non-existența, unicitatea, proprietățile calitative, comportamentul asimptotic al șirurilor de soluții pentru anumite clase de ecuații cu derivate parțiale.

Această teză este împărțită în patru capitole.

Capitolul 1 este intitulat "*Probleme de valori proprii neliniare*" în care vom studia câteva probleme de valori proprii neliniare în domenii mărginite sau nemărginite din spațiul Euclidian \mathbb{R}^N . Operatorii

Stancu

diferențiali implicați în construcția problemelor de valori proprii analizate aici sunt: operatorul lui Laplace, operatorul p -Laplacian, operatorul Laplacian fracțional sau operatorul Baouendi-Grushin. Acest capitol conține 5 secțiuni, fiecare dintre ele bazându-se pe un articol diferit și fiecare secțiune descrie o problemă diferită.

Secțiunea 1.1 se bazează pe articolul [15]. Aici, o problemă de valori proprii atipică este analizată într-un domeniu mărginit din spațiul Euclidian \mathbb{R}^2 cu o condiție Dirichlet omogenă pe frontiera domeniului. Se arată că spectrul acestei probleme conține două intervale distincte separate de un alt interval unde nu se găsește nici o altă valoare proprie a problemei.

Secțiunea 1.2 se bazează pe articolul [6]. În această secțiune, o problemă de valori proprii este studiată într-un domeniu mărginit și neted cu condiție omogenă de tip Neumann pe frontieră. S-a demonstrat că această problemă posedă o familie continuă de valori proprii plus o altă valoare proprie distinctă izolată.

Secțiunea 1.3 se bazează pe articolul [14]. În această secțiune, perturbăm cu un operator p -Laplacian problema de valori proprii a Laplacianului studiată de Szulkin & Willem [24] și anume

$$-\Delta u = \lambda V(x)u, \quad u \in \mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}},$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) este o mulțime deschisă și $V : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ este o pondere care poate avea puncte singulare și satisface ipotezele

$$\begin{cases} V \in L_{loc}^1(\Omega), V = V_1 + V_2, V_1 \in L^{N/2}(\Omega), \\ \lim_{|x|_N \rightarrow \infty} |x|_N^2 V_2(x) = 0, \lim_{x \rightarrow y} |x - y|_N^2 V_2(x) = 0 \text{ pentru orice } y \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Noua familie de probleme este $-\Delta u - \Delta_p u = \lambda V(x)u$ cu $p \in (1, N) \setminus \{2\}$, iar această familie va fi studiată în contextul spațiilor de tip Orlicz-Sobolev pe mulțimi deschise generale din \mathbb{R}^N cu $N \geq 3$. Analiza unor astfel de probleme conduce la caracterizarea completă a spectrului ca fiind un interval deschis și nemărginit.

Secțiunea 1.4 se bazează pe articolul [7] și se preocupă cu determinarea existenței soluțiilor netriviale ale unei perturbări a problemei clasice de valori proprii a operatorului (s, p) -Laplacian fracțional și anume $(-\Delta_p)^s u = \lambda |u|^{p-2} u$ în Ω , $u = 0$ în $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, cu un operator (t, q) -Laplacian fracțional în partea stângă a primei ecuației, atunci când $s, t \in (0, 1)$, $p, q \in (1, \infty)$ verifică $s - N/p = t - N/q$ și $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) este un domeniu mărginit cu frontiera de tip Lipschitz. Soluțiile netriviale ale problemei de valori proprii perturbată există dacă și numai dacă parametrul real λ este strict mai mare decât prima valoare proprie a operatorului (s, p) -Laplacian fracțional.

Secțiunea 1.5 se bazează pe articolul [17]. Vom arăta că spectrul unui operator neomogen de tip Baouendi-Grushin cu condiție Dirichlet omogenă pe frontieră este exact intervalul $(0, \infty)$. Acest lucru este în contrast puternic cu situația operatorul Baouendi-Grushin clasic al cărui spectru constă într-un șir crescător și nemărginit de numere reale pozitive. În plus, pentru fiecare valoare proprie a operatorului Baouendi-Grushin neomogen există un șir de funcții proprii corespunzătoare ce converge la zero.

Stancu

Rezultatele din Secțiunea 1.2 se regăsesc și în teza [4], iar rezultatele din Secțiunea 1.4 sunt incluse în teza [5].

Capitolul 2 intitulat “*Comportamentul asimptotic al soluțiilor unor clase de ecuații cu derivate parțiale*” conține 6 secțiuni, fiecare dintre ele discutând o problemă diferită.

Secțiunea 2.1 se bazează pe articolul [18] și este dedicată studiului ecuației $-\Delta_p u = \lambda e^u$ în Ω cu condiție Dirichlet omogenă pe frontieră, unde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) este un domeniu mărginit cu frontiera netedă. S-a demonstrat că pentru orice număr real $p > N$, există un număr real pozitiv λ^* , ce nu depinde de p , astfel încât pentru orice $\lambda \in (0, \lambda^*)$, această problemă posedă o soluție nenegativă u_p . De asemenea, este analizat comportamentul asimptotic al șirului $\{u_p\}$ când $p \rightarrow \infty$ și se arată că șirul $\{u_p\}$ converge uniform la funcția distanță la frontiera domeniului.

Secțiunea 2.2 se bazează pe articolul [8] unde este prezentată familia de probleme de valori proprii

$$\begin{cases} -\Delta_{2n} u = \lambda u, & \text{în } \Omega, \\ u = 0, & \text{pe } \partial\Omega, \\ \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1, \end{cases} \quad (1)$$

unde Δ_{2n} este $2n$ -Laplacianul și $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) este un domeniu mărginit cu frontiera netedă. Legat de această familie de probleme (I), s-a arătat că șirul corespunzător funcțiilor proprii pozitive, asociate celei mai mici valori proprii, converge uniform în domeniul nostru, când $n \rightarrow \infty$, la funcția distanță la frontieră normalizată în $L^2(\Omega)$.

Secțiunea 2.3 se bazează pe articolul [13]. Aici, este investigată existența valorilor proprii principale și a funcțiilor proprii principale corespunzătoare pentru un sistem cu două ecuații cu derivate parțiale ce implică prezența p -Laplacianului. Apoi, este studiat comportamentul asimptotic al șirului funcțiilor proprii principale când $p \rightarrow \infty$ și se arată că, eventual trecând la un subșir, acest șir converge uniform la o anumită limită ce este dată de o pereche de funcții continue. Mai mult, ecuațiile limită, care au ca soluții funcțiile limită, sunt identificate.

Secțiunea 2.4 se bazează pe articolul [11]. În această secțiune, se analizează comportamentul asimptotic al șirului $\{v_n\}$ al soluțiilor nenegative, ce aparțin unor spații de tip Orlicz-Sobolev, ale unei clase de probleme neomogene cu condiție Dirichlet omogenă pe frontieră și se arată că $\{v_n\}$ converge uniform în domeniul Ω la funcția distanță la frontieră, când $n \rightarrow \infty$.

Secțiunea 2.5 se bazează pe articolul [2]. Comportamentul asimptotic al șirului $\{u_n\}$ al primelor funcții proprii pozitive pentru probleme de valori proprii neomogene este studiat în contextul spațiilor de tip Orlicz-Sobolev. După extragerea unui subșir, am arătat că $u_n \rightarrow u_\infty$ uniform în domeniu când $n \rightarrow \infty$, unde u_∞ este o soluție de viscozitate netrivială a unei ecuații cu derivate parțiale neliniară ce implică prezența ∞ -Laplacianului, iar această ecuație va fi identificată.

Secțiunea 2.6 se bazează pe articolul [22] și aici se arată că șirul $\{u_n\}$ al soluțiilor unei clase de probleme neomogene converge uniform în domeniul Ω la o funcție ∞ -armonică ce satisface condiția Dirichlet prescrisă pe frontieră, atunci când $n \rightarrow \infty$.

Stanca

Rezultatele din Secțiunea 2.2 sunt incluse în teza [5] în timp ce rezultatele din Secțiunea 2.4 se regăsesc în teza [10].

Capitolul 3 intitulat “*Probleme de tip torsional creep*” este dedicat analizei unor probleme care sunt relaționate cu fenomenul de tip “torsional creep”, care reprezintă deformarea plastică permanentă a unei material atunci când acesta este supus unui moment de torsiune pentru o perioadă extinsă de timp și la temperatură suficient de ridicată.

Secțiunea 3.1 se bazează pe articolul [23]. În această secțiune, se studiază comportamentul asimptotic al unui șir de soluții pozitive ale unei familii de probleme de tip torsional creep ce implică prezența unor operatori diferențiali anizotropici cu creștere rapidă. Se arată că șirul de soluții converge uniform în domeniu la o anumită funcție distanță la frontiera domeniului ce este definită în concordanță cu anizotropia problemei analizate.

Secțiunea 3.2 se bazează pe articolul [16]. Aici, se investigează comportamentul asimptotic al soluțiilor unei familii de probleme de tip torsional creep ce implică prezența unui operator p -Laplacian de tip Grushin. Aceste rezultate completează unele lucrări anterioare pe acest subiect ale lui L. E. Payne & G. A. Philippin [19], B. Kawohl [12] și T. Bhattacharya, E. DiBenedetto, & J. Manfredi [1].

Secțiunea 3.3 se bazează pe articolul [9]. Această secțiune se preocupă cu studiul comportamentului asimptotic al soluțiilor unei familii de probleme cu condiție pe frontieră ce implică prezența unui operator diferențial în forma divergență pe un domeniu echipat cu o metrică Finsler. Se arată că soluțiile converg uniform la funcția distanță la frontiera domeniului, ce ia în considerare norma Finsler prezentă în ecuație. Acest lucru implică faptul că un rezultat cunoscut din analiza problemelor ce modelează fenomene de tip torsional creep continuă să fie adevărat în acest context mai general.

Rezultatele prezentate în Secțiunea 3.3 sunt incluse și în teza [5].

Ultimul capitol al acestei teze este intitulat “*Comentarii finale și direcții viitoare de cercetare*” și prezintă câteva idei legate de studiul unor probleme deschise pornind de la cele investigate în primele trei capitole ale acestei teze. De asemenea, sunt prezentate și planuri viitoare privind evoluția carierei profesionale și științifice a candidatei, atât din punctul de vedere al cercetării cât și din punctul de vedere al didacticii.

References

- [1] T. Bhattacharya, E. DiBenedetto, & J. Manfredi: Limits as $p \rightarrow \infty$ of $\Delta_p u_p = f$ and related extremal problems, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, special issue (1991), 15–68.
- [2] M. Bocea, M. Mihăilescu, & D. Stancu-Dumitru: The limiting behavior of solutions to inhomogeneous eigenvalue problems in Orlicz-Sobolev spaces, *Adv. Nonlinear Stud.* **14** (2014), 977–990.
- [3] H. Brezis & F. Browder: Partial Differential Equations in the 20th Century, *Adv. Math.* **135** (1998), 76–144.
- [4] M. Fărcășeanu: *Eigenvalue Problems for Elliptic Operators*, M.Sc. Thesis, University of Craiova, 2015.
- [5] M. Fărcășeanu: *A Variational Analysis of Some Classes of Integral and Differential Equations: Eigenvalue Problems and Torsional Creep Problems*, Ph.D. Thesis, University of Craiova, 2018.



- [6] M. Fărcășeanu, M. Mihăilescu, & D. Stancu-Dumitru: On the set of eigenvalues of some PDEs with homogeneous Neumann boundary condition, *Nonlinear Analysis* **116** (2015), 19–25.
- [7] M. Fărcășeanu, M. Mihăilescu, & D. Stancu-Dumitru: Perturbed fractional eigenvalue problems, *Discrete and Continuous Dynamical Systems–A* **37** (12) (2017), 6243–6255.
- [8] M. Fărcășeanu, M. Mihăilescu, & D. Stancu-Dumitru: On the convergence of the sequence of solutions for a family of eigenvalue problems, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **40** (2017), 6919–6926.
- [9] M. Fărcășeanu, M. Mihăilescu & D. Stancu-Dumitru: On a family of torsional creep problems in Finsler metrics, *Canadian Journal of Mathematics*, 18 pages, published online (DOI: <https://doi.org/10.4153/S0008414X20000681>).
- [10] A. Grecu: *The Variational Analysis of some Classes of Partial Differential Equations*, Ph.D. Thesis, University of Craiova, 2021.
- [11] A. Grecu & D. Stancu-Dumitru: The asymptotic behavior of solutions to a class of inhomogeneous problems: an Orlicz-Sobolev space approach, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations* **38** (2021), 1-20.
- [12] B. Kawohl: On a family of torsional creep problems, *J. Reine Angew. Math.* **410** (1990), 1–22.
- [13] M. Mihăilescu, J. D. Rossi, & D. Stancu-Dumitru: A limiting problem for a family of eigenvalue problems involving p-Laplacians, *Revista Matematica Complutense* **32** (3) (2019), 631–653.
- [14] M. Mihăilescu & D. Stancu-Dumitru: A perturbed eigenvalue problem on general domains, *Annals of Functional Analysis* **7** (4) (2016), 529–542.
- [15] M. Mihăilescu & D. Stancu-Dumitru: On the spectrum of a nontypical eigenvalue problem, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations* **87** (2018), 1–10.
- [16] M. Mihăilescu & D. Stancu-Dumitru, Torsional creep problems involving Grushin-type operators, *Applied Mathematics Letters* **121** (2021) no. 107423.
- [17] M. Mihăilescu, D. Stancu-Dumitru, & C. Varga: On the spectrum of a Baouendi-Grushin type operator: an Orlicz-Sobolev space setting approach, *Nonlinear Differential Equations and Applications* **22** (5) (2015), 1067–1087.
- [18] M. Mihăilescu, D. Stancu-Dumitru, & C. Varga: The convergence of nonnegative solutions for the family of problems $-\Delta_p u = \lambda e^u$ as $p \rightarrow \infty$, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* **24** (2) (2018), 569–578.
- [19] L. E. Payne & G. A. Philippin: Some applications of the maximum principle in the problem of torsional creep, *SIAM J. Appl. Math.* **33** (1977), 446–455.
- [20] H. Poincaré: Sur les Équations aux Dérivées Partielles de la Physique Mathématique, *Amer. J. Math.* **12** (1890) 211–294.
- [21] D. Stancu-Dumitru: *Qualitative Methods in the Study of Nonlinear Elliptic Problems*, Ph.D. Thesis, University of Craiova, 2012.
- [22] D. Stancu-Dumitru: The asymptotic behavior of a class of ϕ -harmonic functions in Orlicz-Sobolev spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **463** (1) (2018), 365–376.
- [23] D. Stancu-Dumitru: Anisotropic torsional creep problems involving rapidly growing differential operators, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* **51** (2020), Article Number: UNSP 103003.
- [24] A. Szulkin & M. Willem: Eigenvalue problems with indefinite weight, *Studia Mathematica* **135** (1999), 191–201.

Data: 27.09.2021

Semnatura