ACADEMIA ROMÂNĂ
SCOSAAR

REZUMATUL TEZEI DE ABILITARE

TITLUL: Mathematical methods in water wave problems

Domeniul de abilitare: *Matematică*

Autor: Delia-Mariela Ionescu-Kruse

Prezenta teză de abilitare reflectă progresul ştiinţific realizat în perioada 2007-2020, în înţelegerea şi rezolvarea unor probleme de mecanica fluidelor, ecuații cu derivate parţiale, unde neliniare, stabilitatea fluidelor și dinamica fluidelor geofizice. Metodele matematice utilizate pentru rezolvarea acestor probleme sunt variate și fascinante.

Capitolul 2 este dedicat metodelor variaţionale utilizate în modelarea valurilor şi a curgerilor de apă. Problema matematică clasică a mişcării unui fluid perfect implică ecuaţiile lui Euler într-un domeniu cu frontieră liberă, ecuaţia de incompresibilitate a fluidului și condiţiile la limită adecvate. Complexitatea ridicată a acestei probleme, chiar fără a lua în considerare rotaţia Pământului şi influenţa stratificării, a condus matematicienii și fizicienii la obţinerea unor seturi mai simple de ecuaţii, convenabile pentru a descrie mişcarea fluidelor în unele regimuri fizice specifice. Pentru a dezvolta o procedură de aproximare sistematică, trebuie să caracterizăm ecuaţiile complete ale lui Euler în funcţie de mărimea anumitor parametrii. Cei doi parametri importanţi, care joacă un rol crucial în teoria valurilor, sunt ϵ, ce măsoară raportul dintre amplitudinea undei și adâncimea fluidului neperturbat, şi δ, ce măsoară raportul dintre adâncimea fluidului şi lungimea de undă. Parametrul de amplitudine ϵ este asociat cu neliniaritatea undei, astfel încât ϵ mic implică o teorie aproape liniară a undelor . Parametrul de adâncime mică δ măsoară abaterea presiunii, în fluidul de sub val, departe de distribuţia presiunii hidrostatice. Rolul lui δ independent de ϵ este util în descrierea valurilor de adâncime mică cu amplitudine arbitrară. Valurile de amplitudine mică şi lungime de undă lungă (sau valuri de mică adâncime) sunt aproximate de modele slab neliniare, cum ar fi ecuaţiile Korteweg-de Vries (KdV) şi Boussinesq. O serie de ecuaţii de evoluţie neliniară (de exemplu, Green-Naghdi (GN), Camassa-Holm (CH), Degasperis-Procesi (DP), Camassa-Holm cu două componente (CH2) etc.)), care constituie aproximări mai precise ale ecuaţiilor lui Euler decât ecuaţia clasică KdV, au fost studiate intens în ultimele decenii. Derivarea seturilor mai simple de ecuaţii ce modelează fenomene de curgere se face în aşa fel încât aşa-numitele ecuaţii aproximative rezultate să fie mai uşor de manevrat decât ecuaţiile complete, dar să păstreze încă unele dintre trăsăturile lor structurale importante, cum ar fi structură variaţională sau hamiltoniană. În anii 60-70, într-o serie de lucrări de pionierat, Arnold iniţiază utilizarea metodelor variaţionale geometrice în descrierea ecuaţiilor unui fluid ideal incompresibil. Natura hamiltoniană a ecuaţiilor lui Euler aduce o serie de rezultate fundamentale în teoria matematică a dinamicii unui fluid ideal incompresibil în special în domeniul stabilităţii hidrodinamice. Pentru propagarea undelor în ape puţin adânci, am obţinut în lucrările [**131, 132, 139, 140**] ecuaţia CH (fără sau cu vorticitate), sistemul GN şi sistemul CH2, printr-o combinaţie între dezvoltări în raport cu parametrii mici şi o metodă variaţională în formalismul lagrangean. Folosind aceeaşi metodă, am obţinut în [**144**] un nou sistem cu două componente (N2C) pentru propagarea undelor de suprafaţă în ape puţin adânci cu o curgere irotaţională. Acest sistem are o formulare hamiltoniană necanonică şi pentru el putem de asemenea găsi o soluţie exactă de tip undă solitară, care are o expresie diferită de soluţia de tip sech obţinută pentru sistemul GN. Metoda hamiltoniană pentru dinamica undelor de suprafaţă liberă a fost prezentată pentru prima dată de Zakharov în 1968. Lucrarea sa pentru unde irotaţionale în ape adânci, a fost extinsă în 2007-2008 la curgeri cu vorticitate constantă şi de adâncime finită [53, 234, 235]. Curgerile bidimensioanle, irotaţionale, cu două straturi posedă de asemenea o formulare hamiltoniană [76]; în cazul rotaţional, cu vorticitate constantă în fiecare strat, formularea hamiltoniană pentru curgerile periodice de apă a fost realizată în [54] . În [**158**] am arătat că, luând în considerare efectele Coriolis în aproximarea f-plan ecuatorială pentru curgeri periodice bidimensioanle, cu două straturi şi cu vorticitate constantă în fiecare strat, descrierea hamiltoniană a ecuaţiilor de guvernare se păstrează. Pentru a realiza acest lucru, am folosim o metodă variaţională combinată cu metode din analiza armonică (operatori Dirichlet-Neumann).

O caracteristică fascinantă a studiului valurilor este că în mişcarea lor pot ieşi în evidenţa anumite forme elementare, cum ar fi, fronturi, pulsuri sau pachete de unde periodice. Înţelegerea matematică a acestor forme elementare este esenţială pentru obţinerea de informaţii fundamentale despre modelele mai complexe. În capitolul 3, analizăm soluţiile de tip undă călătoare pentru unele dintre modelele importante în literatură - modelul GN, modelul CH2, modelul N2C, modelul Zakharov-Itō (ZI) și modelul Kaup-Boussinesq (KB) - ce descriu valuri care se propagă în ape de mică adâncime, atât pentru curgeri irotaţionale cât și pentru curgeri cu forfecare constantă. Deşi modelele irotaţionale (cu avantaje considerabile în analiza lor matematică) pentru mişcarea undelor dau multe rezultate practice despre natura valurilor, în realitate există întotdeauna o anumită vorticitate prezentă în mişcarea efectivă a undelor: pentru valurile formate de vânt, pentru valurile ce se propagă pe un curent de forfecare sau pentru valurile lângă o navă sau un debarcader. Vom acorda o atenţie specială cazului în care vorticitatea este prezentă şi are o valoare constantă. Pentru valurile ce se propagă în ape puţin adânci, alegerea vorticităţii constante nu este doar o simplificare matematică dar este şi rezonabilă din punct de vedere fizic, deoarece, în acest caz, vorticitatea medie nenulă este mai importantă decât distribuţia sa specifică - vezi discuţia din [79]. Pentru fiecare dintre modelele cu două componente de mai sus, derivăm în [**84, 85**], prin aplicarea unei proceduri unificate, cea mai generală ecuaţie diferenţială ordinară care descrie întreaga familie de soluţii de tip undă călătoare a modelului. Existenţa şi profilul undelor călătoare depind de valorile constantelor de integrare şi de existenţa, semnul şi ordinul de multiplicitate al rădăcinilor unor polinoame de grad 3, 4, 5, 6, în funcţie de model. Majoritatea studiilor dedicate undelor călătoare se concentrează pe o anumită subclasă de soluţii: undele solitare (pulsuri), care au o descreştere rapidă la infinit, împreună cu toate derivatele lor. Alegând în mod adecvat constantele de integrare vom obţine ecuaţiile care descriu soluţiile de tip undă solitară. Aceste unde călătoare localizate, a căror formă nu se modifică pe măsură ce se propagă cu o viteză constantă, sunt mai rar prezente decât pachetele de unde periodice, dar reprezintă totuşi modele de unde observabile şi frumoase. Unele dintre ecuaţiile generale pot fi rezolvate analitic pentru a obţine soluţii explicite, dar o descriere a profilurilor de undă călătoare pentru toate modelele de mai sus poate fi făcută prin efectuarea unei analize în planul fazelor [**84, 85**]. O curbă închisă în planul fazelor implică o undă călătoare periodică, o orbită homoclinică oferă o soluţie de tip puls şi o orbită heteroclinică în planul fazelor produce o soluţie de tip front de undă. Pentru anumite valori ale constantelor, toate modelele de mai sus posedă soluţii de tip puls. Pentru sistemul KB, găsim soluţii analitice de tip undă călătoare cu pulsuri multiple. Pentru sistemul ZI, se obţin atât soluţii de tip puls cât şi de tip anti-puls. Modelul Camassa-Holm cu două componente, cu sau fără vorticitate, posedă şi soluţii de undă de tip front. Soluţiile de undă de tip front descresc algebric la infinit. Dacă comparăm efectele vorticităţii asupra undelor de tip puls în modelul CH2 și modelul $\mathrm{CH2}_\omega$, vom constata că undele care se propagă către dreapta şi în aceeaşi direcţie ca şi curentul de forfecare subiacent au o amplitudine mai mare şi o lungime de undă mai îngustă iar undele care se propagă către dreapta pentru care curentul de forfecare subiacent este în direcţia opusă sunt mai largi, amplitudinea lor scade.

În capitolul 4 investigăm mişcarea particulelor de apă sub diferite tipuri de valuri progresive. Descrierea clasică a traiectoriilor particulelor se obţine în cadrul teoriei lineare a valurilor. Viziunea predominantă era că particulele din interiorul pachetelor de valuri periodice care călătoresc peste mare se deplasează pe orbite închise, eliptice sau circulare în funcţie de adâncimea apei (vezi, de exemplu, [80, 165, 179, 192, 219, 220]). Însă, chiar şi în teoria liniară a valurilor, sistemul de ecuaţii diferenţiale ordinare ce descrie mişcarea particulelor este neliniar. În timp ce într-o primă aproximare a acestui sistem toate traiectoriile particulelor sunt închise, Constantin și Villari [71] au arătat, folosind consideraţii în planul fazelor, că pentru undele gravitaţionale periodice cu amplitudine mică, traiectoriile particulelor nu sunt de fapt închise, cu excepţia cazului în care suprafaţa liberă este plană. Lucrarea [71] a fost urmată de multe alte lucrări cu concluzii similare, fie în cadrul teoriei liniare sau în cadrul teoriei complet neliniare, a se vedea, de exemplu, [37, 44, 48, 67, 68, 70, 86, 113, 236]. Pentru valurile cu amplitudine mică, pe lângă analiza în planul fazelor, soluţiile exacte ale sistemului neliniar permit o mai bună înţelegere a dinamicii. În [**133, 134, 135, 136, 137, 138, 141**] am obţinut soluţiile analitice ale sistemelor care descriu traiectoriile particulelor la propagarea diferitelor tipuri de valurilor cu amplitudine mică, sub efectul gravitaţiei şi tensiunii superficiale, în prezenţa sau nu a curenţilor de fundal şi a vorticităţii. Aceste soluţii nu sunt curbe închise: unele traiectorii ale particulelor sunt curbe ondulate spre dreapta sau spre stânga, altele sunt bucle cu o abatere înainte sau cu o abatere înapoi, unele traiectorii sunt de tip peakon, altele pot avea forme bizare. Pentru valurile cu amplitudine mică şi vorticitate constantă şi pentru valurile irotaţionale cu amplitudine mică în ape adânci, facem în [**138, 141**] şi câteva observaţii cu privire la punctele de stagnare, acele puncte în care componenta verticală a câmpului de viteze a fluidului este zero, în timp ce componenta orizontală este egală cu viteza profilului de undă. Punctele de stagnare reprezintă un interes special deoarece sunt puncte în care caracteristica curgerii se schimbă adesea. Ele pot fi localizate pe suprafaţa liberă, în acest caz unda se numeşte undă extremă [5, 212, 221, 233], pe baza sau în interiorul domeniului fluidului [70, 86, 193, 236], [**138, 141**]. Formarea punctelor de stagnare în interiorul fluidului poate fi, de asemenea, legată de fenomenul de spargere a valurilor (wave breaking) în apele adânci.

Dinamica fluidelor geofizice este studiul mişcării fluidelor în care rotaţia Pământului joacă un rol semnificativ - termenii Coriolis sunt încorporaţi în ecuaţiile generale - şi se aplică unei game largi de curgeri oceanice și atmosferice [77, 107, 230]. În oceanografie, ecuaţiile generale adecvate mişcării pe o sferă sunt de obicei simplificate prin invocarea aproximărilor de plan tangent - prin care suprafaţa curbă a Pământului este aproximată local cu un plan tangent. Există o literatură bogată despre dinamica undelor ecuatoriale. Într-o primă aproximare, numită aproximare f-plan, valabilă într-o bandă

de aproximativ 2° latitudine de ambele părţi ale ecuatorului, parametrul Coriolis este fixat la o valoare constantă iar variaţiile latitudinale nu sunt luate în considerare. Aproximarea β-plan, care se aplică în regiunile aflate la o latitudine de 5° de fiecare parte a ecuatorului, ia în considerare faptul că forţa Coriolis poate varia de la un punct la altul şi introduce o variaţie liniară cu latitudinea a parametrului Coriolis. În prima secţiune a capitolului 5, considerăm problema ecuatorială bidimensională a valurilor cu vorticitate constantă în aproximarea f-plan. În cazul undelor de amplitudine mică, deducem relaţiile de dispersie şi găsim soluţiile analitice ale sistemului de ecuaţii diferenţiale neliniare care descriu traiectoriile particulelor sub astfel de unde [**157**]; soluțiile obţinute nu sunt curbe închise.
Soluţiile exacte ale ecuaţiilor generale de guvernare sunt rare şi, în general, descriu condiţii ideale care nu corespund complexităţii comportamentului fizic observat. Cu toate acestea, aceste soluţii sunt precise şi clare în ceea ce priveşte validitatea, detaliile și structura lor şi pot oferi o bază pentru analize relevante mai directe. Abordarea iniţiată de Gerstner, de a găsi în cadrul lagrangean o soluţie exactă explicită pentru curgerile gravitaţionale, a fost extinsă şi la curgerile geofizice (a se vedea, de exemplu, Constantin [41, 42], lucrarea de sinteză [118] şi referinţele din aceasta). În capitolul 5, obţinem soluţii exacte implicite de tip Gerstner la problema geofizică a undelor de-a lungul unei plaje înclinate, în aproximările f-plan şi β-plan. Aceste soluţii, obţinute în cadrul lagrangean, descriu unde geofizice care se propagă spre vest sau spre est de-a lungul unei plaje înclinate, cu linia de ţărm paralelă cu ecuatorul, şi ale căror amplitudini descresc exponenţial departe de ţărm [**147, 148**].
La o latitudine arbitrară, soluţii tridimensionale de tip Gerstner au fost obţinute mai întâi, în aproximarea f-plan, de către Pollard [211]. În aproximarea β-plan, obţinem în [**30**] soluţii explicite, neliniare, tridimensionale, pentru propagarea undelor geofizice, atât spre est, cât şi spre vest, la o latitudine arbitrară, în prezenţa unui curent subiacent constant. În literatura de specialitate, forţa centripetă este de obicei neglijată, fiind relativ mult mai mică decât forţa Coriolis. Păstrarea acestor termeni în ecuaţiile de mişcare creşte complexitatea lor matematică, dar joacă un rol central în facilitarea admiterii în soluţiile lor a unei game largi de curenţi subiacenţi ce depind de adâncime [117]. În [**31**], considerăm ecuaţiile de mişcare la o latitudine arbitrară, în aproximarea β-plan, modificate pentru a încorpora forţa centripetă. Obținem o soluţie exactă de tip Gerstner a acestei probleme, care prescrie unde geofizice tridimensională ce se propagă atât spre est cât şi spre

vest, într-o bandă relativ îngustă la o latitudine arbitrară, în prezenţa unui curent subiacent constant. Relaţia de dispersie a undelor obţinute conţine contribuţii de la forţa Coriolis, de la forţa centripetă şi de la curentul subiacent. Facem o discuţie detaliată a situaţiilor întâlnite în emisfera nordică şi în emisfera sudică, pentru curenţi admisibili, atât în direcţia de curgere cât şi în direcţie contrară, de magnitudine plauzibilă fizic.
În vecinătatea ecuatorului, studiul dinamicii geofizice este în realitate foarte complicat, deoarece sunt implicaţi atât de mulţi factori (curenţi subiacenţi neuniformi, stratificare, procese de ascendenţa/descendenţă, termocline, etc.). Soluţiile de tip Gerstner nu reuşesc să capteze variaţiile accentuate în adâncime ale curgerilor, de unde şi interesul pentru o abordare matematică care să capteze aceste variaţii; stratificarea densităţii şi termoclina (interfaţa care separă două straturi adiacente cu densitate constantă diferită) nu joacă niciun rol în această secţiune - adâncimea termoclinei (aproximativ 200 m pentru curentul ecuatorial subiacent (EUC)) este scurtă în comparaţie cu adâncimea medie totală a oceanului (aproximativ 4 km pentru Pacific). Unele soluţii staţionare exacte, care reprezintă fluxuri pur azimutale ce nu variază în direcţia azimutală, au fost prezentate și explorate de Constantin şi Johnson în [56]; a se vedea şi sinteza [170]. În ultima secţiune a capitolului 5, pe baza articolelor **[155, 156]**, studiem un model tridimensional neliniar, pentru curgerile ecuatoriale care se mişcă încet în direcţia azimutală, pentru care găsim soluţii exacte ce captează cele mai relevante caracteristici geofizice: curenţi dependenţi de adâncime, cu o deplasare a suprefeţei apei către poli sau către ecuator, și cu mişcări pe verticală în sus şi în jos. Cheia rezultatelor este o caracteristică structurală: două componente ale câmpului tridimensional de viteze se pot exprima ca funcţionale neliniare de componenta azimutală a vitezei şi, prin urmare, această componentă a vitezei defineşte curgerea. Vom analiza în detaliu câteva profiluri azimutale polinomiale (până la gradul 3) ạ̧i profiluri azimutale exponenţiale.

Capitolul 6 este dedicat unei metode elegante de instabilitate, metoda perturbaţiilor cu lungimi de undă scurtă, o metodă matematică riguroasă pentru problema de stabilitate a curgerilor tridimensionale, nevâscoase, incompresibile. Ea a fost dezvoltată independent de Bayly [11], Friedlander & Vishik [98] şi Lifschitz & Hameiri [186]. Un ingredient esenţial al metodei perturbaţiilor cu lungimi de undă scurtă, legat de tehnicile din optica geometrica, este de a lua în considerare perturbaţii în forma WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin), evoluţiile lor în timp fiind guvernate (până la termenii care sunt incapabili de a anula creşterea termenilor principali) de un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale, sistem format din ecuaţia eikonală pentru faza undei şi ecuaţia de transport pentru amplitudinea undei vitezei. Deoarece ecuaţia eikonală şi ecuaţia de transport implică doar derivata advectivă de-a lungul câmpului de viteze al curgerii, aceste ecuaţii cu derivate parţiale pot fi scrise ca ecuaţii diferențiale ordinare de-a lungul traiectoriilor curgerii. Astfel, condiţii suficiente de instabilitate şi condiţii necesare de stabilitate se obţin prin analiza unui sistem de ecuaţii diferențiale ordinare de-a lungul traiectoriilor curgerii: existenţa soluţiilor nemărginite pentru acest sistem implică instabilitatea, dacă toate soluţiile acestui sistem sunt mărginite implică stabilitatea curgerii în raport cu clasa perturbaţiilor cu lungime de undă scurtă; rezultatele au o natură locală, fiind localizate de-a lungul traiectoriilor. Metoda a fost aplicată cu succes atunci când curgerea este descrisă în formalismul lagrangean, începând cu Leblanc [181] pentru soluţia Gerstner. În **[143]** investigăm, prin metoda perturbaţiilor cu lungimi de undă scurtă, instabilitatea soluţiei de undă ce se propagă de-a lungul unei plaje înclinate, soluţie obţinută în formalismul lagrangean [35]. Arătăm că valurile cu parametrul de înclinare (definit ca amplitudinea înmulţită cu vectorul de undă) mai mare decât $\frac{7}{18}\sin\alpha$, α fiind unghiul plajei, sunt instabile. Soluţia de undă ce se propagă în lungul unei plaje - considerată iniţial doar o curiozitate matematică [179], recunoscută acum ca jucând un rol semnificativ în hidrodinamica aproape de ţărm - este posibilă şi în ape cu densitate neconstantă [81, 224, 241]. Acest fapt remarcabil se datorează caracterului special al acestor unde, şi anume, într-un sistem de referinţă care se mişcă odată cu undele, liniile de curent sunt de asemenea liniile de presiune constantă şi, prin urmare, stratificarea fluidul, care face ca densitatea să fie diferită de la o linie de curent la alta, dar constantă pe aceeaşi linie de curent, nu perturbă structura principală a ecuaţiilor. Metoda perturbaţiilor cu lungimi de undă scurtă se poate aplica cu succes pentru fluide barotrope incompresibile **[146]**, şi nu numai pentru curgerile irotaţionale ci şi pentru curgerile geofizice ecuatoriale [51, 103, 119], pentru curgerile barotrope geofizice ecuatoriale **[149]**, pentru curgerile geofizice la o latitudine arbitrară **[30, 31, 150]** şi pentru curgerile generale de rotaţie în prezenţa sau în lipsa forţelor neconservative **[153, 159]**. Pentru alte exemple în contextul geofizic, a se vedea lucrarea de sinteză **[154]** şi referinţele din aceasta. Soluţiile geofizice de tip Gerstner s-au dovedit a fi instabile atunci când profilurile de undă sunt suficient de înclinate. Valoarea parametrului de înclinare critică este foarte apropiată de $\frac{1}{3}$. În regiunile polare, instabilitatea undelor se declanşează pentru o valoare mai mică a parametrului de înclinare decât în regiunea ecuatorială. La o latitudine arbitrară, valurile care călătoresc de la est la vest sunt mai predispuse la instabilitate decât cele care călătoresc de la vest la est. Un curent advers constant favorizează instabilitatea în sensul că, valoarea parametrului de înclinare de la care unda este instabilă este mai scăzută comparativ cu situaţia fără current. În schimb, acestă valoare este mai mare în cazul unui curent în direţia curgerii. Prezenţa curenților subiacenţi dependenţi de adâncime ne oferă unele rezultate de stabilitate locală. Pentru curgerile pur azimutale care modelează curentul ecuatorial (EUC) şi curentul circumpolar antarctic (ACC), în analiza stabilităţii la perturbaţiile cu lungime de undă scurtă obţinem că vectorul de undă este nul şi pentru unele profiluri realiste ale vitezei, perturbaţiile evoluează stabil de-a lungul liniilor de curent ale acestor curgeri.

Capitolul 7 conţine planuri şi direcţii pentru cercetări viitoare.

References

[1] R. Abraham, J. E. Marsden, "Foundations of Mechanics", Benjamin-Cummings, London ISBN 0-8053-0102-X, 1978.

[2] B. Alvarez-Samaniego, D. Lannes, *A Nash-Moser theorem for singular evolution equations. Application to the Serre and Green-Naghdi equations*, Indiana Univ. Math. J. 57 (2008), 97–131.

[3] B. Alvarez-Samaniego, D. Lannes, *Large time existence for 3D water-waves and asymptotics*, Invent. Math. 171 (2008), 485–541.

[4] D. M. Ambrose, J. L. Bona, T. Milgrom, *Global solutions and ill-posedness for the Kaup system and related Boussinesq systems*, Indiana Univ. Math. J. 68 (2019), 1173–1198.

[5] C. J. Amick, L. E. Fraenkel, J. F. Toland, *On the Stokes conjecture for the wave of extreme form*, Acta Math. 148 (1982), 193–214.

[6] V. I. Arnold, *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluids parfaits*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 16 (1966), 319–361.

[7] V. I. Arnold, "Mathematical Methods of Classical Mechanics", Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1989.

[8] V. I. Arnold, B. A. Khesin, "Topological Methods in Hydrodynamics", Springer-Verlag, New York, 1998.

[9] M. L. Banner, D. H. Peregrine, *Wave breaking in deep water*, Annu. Rev. Fluid Mech. 25 (1993), 373-397.

[10]] M. Baxter, S. R. Choudhury, R. A. Van Gorder, *Zero curvature representation, bi-Hamiltonian structure, and an integrable hierarchy for the Zakharov-Ito system*, Journal of Mathematical Physics 56(2015), Article ID 063503.

[11] B. J. Bayly, *Three-dimensional instabilities in quasi-two dimensional inviscid flows*, Nonlinear wave Interactions in fluids (ed. R. W. Miksad et al.), 71–77, ASME, New York, 1987.

[12] B. J. Bayly, *Three-dimensional centrifugal-type instabilities in inviscid two-dimensional flows*, Phys. Fluids 31 (1988), 56 – 64.

[13] B. J. Bayly, D. D. Holm, A. Lifschitz, *Three-dimensional stability of elliptical vorex columns in external strain flows*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 354 (1996), 895–926.

[14] R. Beals, D. Sattinger, J. Szmigielski, *Acoustic scattering and the extended Korteweg-de Vries hierarchy*, Adv. Math. 140 (1998), 190–206.

[15] R. Beals, D. Sattinger, J. Szmigielski, *Multi-peakons and a theorem of Stieltjes*, Inverse Problems 15 (1999), L1–L4.

[16] T. B. Benjamin, *The solitary wave on a stream with an arbitrary distribution of vorticity*, J. Fluid Mech 12 (1962), 97–116.

[17] T. B. Benjamin, *Impulse, flow force and variational principles*, IMA J. Appl. Maths 32 (1984), 3–68.

[18] T. B. Benjamin, P. J. Olver, *Hamiltonian structure, symmetries and conservation laws for water waves*, J. Fluid Mech. 125 (1982), 137–185.

[19] D. J. Benney, *Some properties of long non-linear waves*, Studies Appl. Math. 52 (1973) 45–50.

[20] J. C. Burns, *Long waves in running water*, Proc. Camb. Phil. Soc. 49 (1953), 695–706.

[21] A. Bressan, A. Constantin, *Global conservative solutions of the Camassa-Holm equation*, Arch. Rat. Mech. Anal. 183 (2007), 215–239.

[22] A. Bressan, A. Constantin, *The deflection angle of surface ocean currents from the wind direction*, J. Geophys. Res. Oceans 124 (2019), 7412–7420.

[23] P. F. Byrd, M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1971.

[24] R. Camassa, D. D. Holm, *An integrable shallow water equation with peaked solitons*, Phys. Rev. Letters 71 (1993), 1661–1664.

[25] J. D. Carter, R. Cienfuegos, *The kinematics and stability of solitary and cnoidal wave solutions of the Serre equations*, Eur. J. Mech. B 30 (2011), 259–268.

[26] J. Cavalcante, H. P. McKean, *The Classical Shallow Water Equations: Symplectic Geometry*, Physica D(1982), 253–260.

[27] M. Chen, *Solitary-wave and multi-pulsed traveling-wave solutions of Boussinesq systems*, Applicable Analysis 72 (2000), 213–240.

[28] M. Chen, S.-Q. Liu, Y. Zhang, *A two-component generalization of the Camassa-Holm Equation and its Solutions*, Lett. Math. Phys. 75 (2006), 1–15.

[29] W. Choi, *Strongly nonlinear long gravity waves in uniform shear flows*, Phys. Rev. E 68 (2003), 1–7.

[30] J. Chu, D. Ionescu-Kruse, Y. Yang, *Exact solution and instability for geophysical waves at arbitrary latitude*, Disc. Cont. Dyn. Syst. 39 (2019), 4399–4414.

[31] J. Chu, D. Ionescu-Kruse, Y. Yang, *Exact solution and instability for geophysical waves with centripetal forces at arbitrary latitude*, J. Math. Fluid Mech. 21 (2019), Art. No.: UNSP 19.

[32] A. Clebsch, *Über eine allgemeine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen*, Z. Reine Angew. Math. 54 (1857), 293–312. *Über die Integration der hydrodynamischen Gleichungen*, Z. Reine Angew. Math. 56 (1859), 1–10.

[33] A. Constantin, *On the inverse spectral problem for the Camassa-Holm equation*, J. Funct. Anal. 155 (1998), 352–363.

[34] A. Constantin, *On the deep water wave motion*, J. Phys. A 34 (2001), 1405–1417.

[35] A. Constantin, *Edge waves along a sloping beach*, J. Phys. A 34 (2001), 9723–9731.

[36] A. Constantin, *On the scattering problem for the Camassa-Holm equation*, Proc. Roy. Soc. London A 457 (2001), 953–970.

[37] A. Constantin, *The trajectories of particles in Stokes waves*, Invent. Math. 166 (2006), 523–535.

[38] A. Constantin, *Two-dimensionality of gravity water flows of constant nonzero vorticity beneath a surface wave train*, Eur. J. Mech. B Fluids 30 (2011), 12–16.

[39] A. Constantin, "Nonlinear Water Waves with Applications to Wave-Current Interactions and Tsunamis", CBMS-NSF Conference Series in Applied Mathematics, Vol. 81, SIAM, Philadelphia, 2011.

[40] A. Constantin, *On the modelling of equatorial waves*, Geophys. Res. Lett. 39 (2012), L05602.

[41] A. Constantin, *An exact solution for equatorially trapped waves*, J. Geophys. Res. 117 (2012), C05029.

[42] A. Constantin, *Some three-dimensional nonlinear equatorial flows*, J. Phys. Oceanogr. 43 (2013), 165-175.

[43] A. Constantin, *On equatorial wind waves*, Differential and Integral Equations 26 (2013), 237–252.

[44] A. Constantin, M. Ehrnström, G. Villari, *Particle trajectories in linear deep-water waves*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 9 (2008), 1336-1344.

[45] A. Constantin, M. Ehrnström, E. Wahlen, *Symmetry of steady periodic gravity water waves with vorticity*, Duke Math. J. 140 (2007), 591–603.

[46] A. Constantin, J. Escher, *Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations*, Acta Mathematica 181 (1998), 229–243.

[47] A. Constantin, J. Escher, *Symmetry of steady periodic water waves with vorticity*, J. Fluid. Mech. 498 (2004), 171–181.

[48] A. Constantin, J. Escher, *Particle trajectories in solitary water waves*, Bull. Amer. Math. Soc. 44 (2007), 423–431.

[49] A. Constantin, J. Escher, *Analyticity of periodic traveling free surface water waves with vorticity*, Ann. Math. 173 (2011), 559–568.

[50] A. Constantin, V.S. Gerdjikov, R. I. Ivanov, *Inverse scattering transform for the Camassa-Holm equation*, Inverse Problems 22 (2006), 2197–2207.

[51] A. Constantin, P. Germain, *Instability of some equatorially trapped waves*, J. Geophys. Res.-Oceans 118 (2013), 2802–2810.

[52] A. Constantin, R. I. Ivanov, *On an integrable two-componet Camassa-Holm shallow water system*, Phys. Lett. A 372 (2008), 7129–7132.

[53] A. Constantin, R. I. Ivanov, E. M. Prodanov, *Nearly-Hamiltonian structure for water waves with constant vorticity* J. Math. Fluid Mech. 10 (2008), 224–237.

[54] A. Constantin, R. I. Ivanov, C. I. Martin. *Hamiltonian formulation for wave-current interactions in stratified rotational flows*, Arch. Ration. Mech. Anal. 221 (2016), no. 3, 1417–1447.

[55] A. Constantin, R. S. Johnson, *The dynamics of waves interacting with the Equatorial Undercurrent*, Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics 109 (2015), 311–358.

[56] A. Constantin, R. S. Johnson, *An exact, steady, purely azimuthal equatorial flow with a free surface*, J. Phys. Oceanogr. 46 (2016), 1935–1945.

[57] A. Constantin, R. S. Johnson, *An exact, steady, purely azimuthal flow as a model for the Antarctic Circumpolar Current*, J. Phys. Oceanogr. 46 (2016), 3585–3594.

[58] A. Constantin, R. S. Johnson, *A nonlinear, three-dimensional model for ocean flows, motivated by some observations of the Pacific Equatorial Undercurrent and thermocline*, Physics of Fluids 29 (2017), 056604.

[59] A. Constantin, R. S. Johnson, *Ekman-type solutions for shallow water flows on a rotating sphere: A new perspective on a classical problem*, Phys. Fluids 31 (2019), 021401.

[60] A. Constantin, R. S. Johnson, *Atmospheric Ekman flows with variable eddy viscosity*. Bound. Layer Meteorol. 170 (2019), 395–414.

[61] A. Constantin, B. Kolev, *Geodesic flow on the diffeomorphism group of the circle*, Comment. Math. Helv. 78 (2003), 787–804.

[62] A. Constantin, D. Lannes, *The hydrodynamical relevance of the Camassa-Holm and Degasperis-Procesi equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. 192 (2009), 165–186.

[63] A. Constantin, H. P. McKean, *A shallow water equation on the circle*, Comm. Pure Appl. Math. 52 (1999), 949–982.

[64] A. Constantin, D. Sattinger, W. Strauss, *Variational formulations for steady water waves with vorticity*, J. Fluid Mech. 548 (2006), 151–163.

[65] A. Constantin, W. Strauss, *Stability of peakons*, Comm. Pure Appl. Math. 53 (2000), 603–610.

[66] A. Constantin, W. Strauss, *Stability of the Camassa-Holm solitons*, J. Nonlinear Sci. 12 (2002), 415–422.

[67] A. Constantin, W. Strauss, *Exact steady periodic water waves with vorticity*, Comm. Pure Appl. Math. 57 (2004), 481–527.

[68] A. Constantin, W. Strauss, *Pressure beneath a Stokes wave*, Comm. Pure Appl. Math. 53 (2010), 533–557.

[69] A. Constantin, W. Strauss, *Periodic traveling gravity water waves with discontinuous vorticity*, Arch. Ration. Mech. Anal. 202 (2011), 133–175.

[70] A. Constantin, E. Varvaruca, *Steady periodic water waves with constant vorticity: regularity and local bifurcation*, Arch. Ration. Mech. Anal. 199 (2011), 33–67.

[71] A. Constantin, G. Villari, *Particle trajectories in linear water waves*, J. Math. Fluid Mech. 10 (2008), 1–18.

[72] D. Coutand, S. Shkoller, *Well-posedness of the free-surface incompressible Euler equations with or without surface tension*, J. Amer. Math. Soc. 20 (2007), 829–930.

[73] W. Craig, *Water waves, hamiltonian systems and Cauchy integrals*, Microlocal Analysis and Nonlinear Waves IMA Vol. Math. Appl. 30 (1991), 37–45.

[74] W. Craig, P. Sternberg, *Symmetry of solitary waves*, Comm. Partial Differential Equations 13 (1988), 603–633.

[75] W. Craig, M. D. Groves, *Hamiltonian long wave approximations to the water-wave problem*, Wave Motion 19 (1994), 367–389.

[76] W. Craig, P. Guyenne, H. Kalisch, *Hamiltonian long-wave expansions for free surfaces and interfaces*, Comm. Pure Appl. Math. 58 (2005), 1587–1641.

[77] B. Cushman-Roisin, J. M. Beckers, "Introduction to Geophysical Fluid Dynamics: Physical and Numerical Aspects", Academic, Waltham, Mass., 2011.

[78] G. D. Crapper, *An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude*, J. Fluid Mech. 2 (1957), 532–540.

[79] T. A. Da Silva, D. H. Peregrine, *Steep, steady surface waves on water of finite depth with constant vorticity*, J. Fluid. Mech. 195 (1988), 281–302.

[80] L. Debnath, "Nonlinear Water Waves", Boston, MA: Academic Press Inc., 1994.

[81] M.-L. Dubreil-Jacotin, *Sur les ondes de type permanent dans les liquides heterogenes*, Atti Accad. Naz. Lincei, 15 (1932), 814–819.

[82] M.-L. Dubreil-Jacotin, *Sur la d'etermination rigoureuse des ondes permanentes périodiques d'ampleur finie*, J. Math. Pures Appl. 13 (1934), 217–291.

[83] H. R. Dullin, G. Gottwald, D. D. Holm, *Camassa-Holm, Korteweg-de Vries-5 other asymptotically equivalent equations for shallow water waves*, Fluid Dyn. Res. 90 (2003), 73–95.

[84] D. Dutykh, D. Ionescu-Kruse, *Travelling wave solutions for some two-component shallow water models*, J. Differential Equations 261 (2016), 1099–1114.

[85] D. Dutykh, D. Ionescu-Kruse, *Effects of vorticity on the travelling waves of some shallow water two-component systems*, Disc. Cont. Dyn. Syst. 39 (2019), 5521–5541.

[86] M. Ehrnström, G. Villari, *Linear water waves with vorticity: Rotational features and particle paths*, J. Differential Equations 244 (2008), pp. 1888-1909.

[87] M. Ehrnström, J. Escher, G. Villari, *Steady water waves with multiple critical layers: Interior dynamics*, J. Math. Fluid Mech. 14 (2012), 407–419.

[88] G. A. El, R. H. J. Grimshaw, N. F. Smyth, *Unsteady undular bores in fully nonlinear shallow-water theory*, Phys. Fluids 18 (2006), 027104.

[89] G. A. El, R. H. J. Grimshaw, M. V. Pavlov, *Integrable shallow-water equations and undular bores*, Stud. Appl. Math. 106 (2001), 157–186.

[90] U. Ehrenmark, *Oblique wave incidence on a plane beach: the classical problem revisited*, J. Fluid Mech. 368 (1998), 291–319.

[91] J. Escher, O. Lechtenfeld, Z. Yin, *Well-posedness and blow-up phenomena for the 2-component Camassa-Holm equation*, Disc. Cont. Dyn. Syst. 19 (2007), 493–513.

[92] J. Escher, M. Kohlmann, J. Lenells, *The geometry of the two-components Camassa-Holm and Degasperis-Procesi equations*, J. Geom. Phys. 61 (2011), 436–452.

[93] J. Escher, D. Henry, B. Kolev, T. Lyons, *Two-component equations modelling water waves with constant vorticity*, Annali di Matematica 195 (2016) 249–271.

[94] G. Falqui, *On a Camassa-Holm type equation with two dependent variables*, J. Phys. A: Math. Gen 39 (2006), 327–342.

[95] R. Ferrari, M. Nikurashin, *Suppression of eddy diffusivity across jets in the Southern Ocean*, J. Phys. Oceanogr. 40 (2010), 1501–1519.

[96] Y. L. Firing, T. K. Chereskin, M. R. Mazloff, *Vertical structure and transport of the Antarctic Circumpolar Current in Drake Passage from direct velocity observations*, J. Geophys. Res.-Oceans 116 (2011), C08015.

[97] A. S. Fokas, B. Fuchssteiner, *Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries*, Physica D 4 (1981), 47–66.

[98] S. Friedlander, M. M. Vishik, *Instability criteria for the flow of an inviscid incompressible fluid*, Phys. Rev. Lett. 66 (1991), 2204–2206.

[99] B. Fuchssteiner, *The Lie algebra structure of nonlinear evolution equations admitting infinite dimensional abelian symmetry groups*, Prog. Theor. Phys. 65 (1981), 861–876.

[100] B. Fuchssteiner, *Some tricks from the symmetry-toolbox for nonlinear equations: Generalizations of the Camassa-Holm equation*, Physica D 95 (1996), 229–243.

[101] I. Gallagher, L. Saint-Raymond, *On the influence of the Earth's rotation on geophysical flows*, Handbook of Mathematical Fluid Mechanics 4 (2007), 201–329.

[102] C. S. Gardner, *Korteweg-de Vries equation and genealizations. IV. The Korteweg-de Vries equation as a Hamiltonian system*, J. Math. Phys. 12 (1971), 1548-1551.

[103] F. Genoud, D. Henry, *Instability of equatorial water waves with an underlying current*, J. Math. Fluid Mech. 16 (2014), 661–667.

[104] F. Gerstner, *Theorie der Wellen samt einer daraus abgeleiteten Theorie der Deichprofile*, Ann. Phys. 2 (1809), 412–445.

[105] F. Gesztesy , H. Holden, *Algebro-geometric solutions of the Camassa-Holm hierarchy*, Rev. Mat. Iberoamericana 19 (2003), 73–142.

[106] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, "Calculus of Variations I", Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[107] A. E. Gill, "Atmosphere-Ocean Dynamics", Academic, 1982.

[108] R. Goyon, *Contribution à la théorie des houles*, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, 22 (1958), 1-55.

[109] A. Green, P. Naghdi, *A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth*, J. Fluid Mech. 78 (1976), 237–246.

[110] C. Guan, Z. Yin, *Global existance and blow-up phenomena for an integrable two-component Camassa-Holm shallow water system*, J. Differential Equations 248 (2010), 2003–2014.

[111] G. Gui, Y. Liu, *On the global existence and wave–breaking criteria for the two-component Camassa–Holm system*, J. Funct. Anal. 258 (2010), 4251–4278.

[112] J. Haberlin, T. Lyons, *Solitons of shallow water models from energy dependent spectral problems*, Eur. Phys. J. Plus, 133 (2018), art. no. 16.

[113] D. Henry, *Particle trajectories in linear periodic capillary and capillary-gravity water waves*, Phil. Trans. R. Soc. A 365 (2007), 2241–2251.

[114] D. Henry, *On Gerstner's water wave*, J. Nonlinear Math. Phys. 15 (2008), 87–95.

[115] D. Henry, *Pressure in a deep-water Stokes wave*, J. Math. Fluid Mech. 13 (2011), 251–257.

[116] D. Henry, *An exact solution for equatorial geophysical water waves with an underlying current*, Eur. J. Mech. B Fluids, 38 (2013), 18-21.

[117] D. Henry, *Equatorially trapped nonlinear water waves in a β-plane approximation with centripetal forces*, J. Fluid Mech. 804 (2016), R1, 11 pp.

[118] D. Henry, *On three-dimensional Gerstner-like equatorial water waves*, Philos. Trans. Roy. Soc. A 376 (2018), no. 2111, 20170088, 16 pp.

[119] D. Henry, H. C. Hsu, *Instability of internal equatorial water waves*, J. Differential Equations 258 (2015), 1015–1024.

[120] S. J. Hogan, *Particle trajectories in nonlinear capillary waves*, J. Fluid Mech. 143 (1984), 243–252.

[121] S. J. Hogan, *Particle trajectories in nonlinear gravity-capillary waves*, J. Fluid Mech. 151 (1985), 105–119.

[122] S. J. Hogan, *Highest waves, phase speeds and particle trajectories of nonlinear capillary waves on sheets of fluid*, J. Fluid Mech. 172 (1986), 547–563.

[123] D. D. Holm, *Hamiltonian structure for two-dimensional hydrodynamics with nonlinear dispersion*, Phys. Fluids 31 (1988), 2371–2373.

[124] D. D. Holm, J. E. Marsden, T. Ratiu, *The Euler-Poincare Equations and Semidirect Products with Applications to Continuum Theories*, Advances in Mathematics 137 (1998), 1–81.

[125] D.D. Holm, J.E. Marsden, T. Ratiu, A. Wienstein, *Nonlinear stability of fluids and plasma equilibria*, Physics Reports 123 (1985), 1–116, North-Holland, Amsterdam.

[126] D. D. Holm, L. O. Naraigh, C. Tronci, *Singular solutions of a modified two-component Camassa-Holm equation*, Phys. Rev. 79 (2009), no. 1, 016601, 13 pp.

[127] P.A. Howd, A.J. Bowen, R.A. Holman, *Edge waves in the presence of strong longshore currents*, J. Geophys. Res. 97 (1992), 11357–11371.

[128] V. M. Hur, *Global bifurcation theory of deep-water waves with vorticity*, SIAM J. Math Anal. 37 (2006), 1482–1521.

[129] V. M. Hur, *Symmetry of steady periodic water waves with vorticity*, Phil. Trans. R. Soc. A 365 (2007), 2203–2214.

[130] V. M. Hur, *Symmetry of solitary water waves with vorticity*, Math. Res. Lett. 15 (2008), 491–509.

[131] D. Ionescu-Kruse, *Variational derivation of the Camassa-Holm shallow water equation*, J. Nonlinear Math. Phys. 14 (2007), 303–312.

[132] D. Ionescu-Kruse, *Variational derivation of the Camassa-Holm shallow water equation with non-zero vorticity*, Disc. Cont. Dyn. Syst.-A 19 (2007), 531–543.

[133] D. Ionescu-Kruse, *Particle trajectories in linearized irrotational shallow water flows*, J. Nonlinear Math. Phys. 15 (2008), 13–27.

[134] D. Ionescu-Kruse, *Particle trajectories beneath small amplitude shallow water waves in constant vorticity flows*, Nonlinear Analysis 71 (2009), 3779–3793.

[135] D. Ionescu-Kruse, *Exact solutions for small-amplitude capillary-gravity water waves*, Wave Motion 46 (2009), 379–388.

[136] D. Ionescu-Kruse, *Small-amplitude capillary-gravity water waves: exact solutions and particle motion beneath such waves*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 11 (2010), 2989–3000.

[137] D. Ionescu-Kruse, *Peakons arising as particl epaths beneath small-amplitude water waves in cosntant vorticity flows*, J. Nonlinear Math. Phys. 17 (2010), 415–422.

[138] D. Ionescu-Kruse, *Elliptic and hyperelliptic functions describing the particle motion beneath small-amplitude water waves with constant vorticity*, Comm. Pure Appl. Anal. 11 (2012), 1475–1496.

[139] D. Ionescu-Kruse, *Variational derivation of the Green-Naghdi shallow-water equations*, J. Nonlinear Math. Phys. 19 (2012), 1240001.

[140] D. Ionescu-Kruse, *Variational derivation of two-component Camassa-Holm shallow water system*, Appl. Anal. 92 (2013), 1241–1253.

[141] D. Ionescu-Kruse, *On the Particle Paths and the Stagnation Points in Small-Amplitude Deep-Water Waves*, J. Math. Fluid Mech. 15 (2013), 41–54.

[142] D. Ionescu-Kruse, *On the small-amplitude long waves in linear shear flows and the Camassa-Holm equation*, J. Mathe. Fluid Mech. 16 (2014), 365–374.

[143] D. Ionescu-Kruse, *Instability of edge waves along a sloping beach*, J. Differential Equations 256 (2014), 3999–4012.

[144] D. Ionescu-Kruse, *A new two-component system modelling shallow-water waves*, Quar. Appl. Math. 73 (2015), 331–346.

[145] D. Ionescu-Kruse, *On Pollard's wave solution at the Equator*, J. Nonlinear Math. Phys. 22 (2015), 523–530.

[146] D. Ionescu-Kruse, *Short-wavelength instabilities of edge waves in stratified water*, Disc. Cont. Dyn. Syst. 35 (2015), 2053–2066.

[147] D. Ionescu-Kruse, *An exact solution for geophysical edge waves in the f-plane approximation*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 24 (2015), 190–195.

[148] D. Ionescu-Kruse, *An Exact Solution for Geophysical Edge Waves in the β-Plane Approximation*, J. Math. Fluid Mech. 17 (2015), 699–706.

[149] D. Ionescu-Kruse, *Instability of equatorially trapped waves in stratified water*, Ann. Mat. Pura Appl. 195 (2016), 585–599.

[150] D. Ionescu-Kruse, *Instability of Pollard's exact solution for geophysical ocean flows*, Physics of Fluids 28 (2016), no.086601.

[151] D. Ionescu-Kruse, *Exact steady azimuthal edge waves in rotating fluids*, J. Math. Fluid Mech. 19 (2017), 501–513.

[152] D. Ionescu-Kruse, *Variational derivation of a geophysical Camassa-Holm type shallow water equation*, Nonlinear Analysis 156 (2017), 286–294.

[153] D. Ionescu-Kruse, *Local stability for an exact steady purely azimuthal flow which models the Antarctic Circumpolar Current*, J. Math. Fluid Mech. 20 (2018), 569–579.

[154] D. Ionescu-Kruse, *On the short-wavelength stabilities of some geophysical flows*, Philos. Trans. R. Soc. A 376 (2018), 20170090.

[155] D. Ionescu-Kruse, *A three-dimensional autonomous nonlinear dynamical system modelling equatorial ocean flows*, J. Differential Equations 264 (2018), 4650–4668.

[156] D. Ionescu-Kruse, *Exponential profiles producing genuine three-dimensional nonlinear flows relevant for equatorial ocean dynamics*, J. Differential Equations 268 (2020), 1326–1344.

[157] D. Ionescu-Kruse, A. Matioc, *Small-amplitude equatorial water waves with constant vorticity: dispersion relations and particle trajectories*, Disc. Cont. Dyn. Syst.-A 34 (2014), 3045–3060.

[158] D. Ionescu-Kruse, C. I. Martin, *Periodic equatorial water flows from a Hamiltonian perspective*, J. Differential Equations 262 (2017), 4451–4474.

[159] D. Ionescu-Kruse, C. I. Martin, *Local Stability for an Exact Steady Purely Azimuthal Equatorial Flow*, J. Math. Fluid Mech. 20 (2018), 27–34.

[160] M. Ito, *Symmetries and conservation laws of a coupled nonlinear wave equation*, Phys. Lett. A 91 (1982), 335–338.

[161] R. I. Ivanov, *Two-component integrable systems modelling shallow water waves: the constant vorticity case*, Wave Motion 46 (2009), 389–396.

[162] R. Ivanov, T. Lyons, *Integrable models for shallow water with energy dependent spectral problems*, J. Nonlinear Math. Phys. 19 (2012), 1240008.

[163] G. C. Johnson, M. J. McPhaden, E. Firing. *Equatorial Pacific ocean horizontal velocity, divergence, and upwelling*, J. Phys. Oceanogr. 31 (2001), 839-849.

[164] R. S. Johnson, *On solutions of the Burns condition (which determines the speed of propagation of linear long waves on a shear flow with or without a critical layer)*, Geophys. Astrophys. Fluid. Dyn. 57 (1991), 115–133.

[165] R. S. Johnson, ”A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves”, Cambridge Univeristy Press, 1997.

[166] R. S. Johnson, *Camassa-Holm, Korteweg-de Vries and related models for water waves*, J. Fluid Mech. 455 (2002), 63–82.

[167] R. S. Johnson, *The Camassa-Holm equation for water waves moving over a shear flow*, Fluid Dynamics Research 33 (2003), 97–111.

[168] R. S. Johnson, *On solutions of the Camassa-Holm equation*, Proc. Roy. Soc. London A 459 (2003), 1687–1717.

[169] R. S. Johnson, *Edge waves: theories past and present*, Phil. Trans. R. Soc. A 365 (2007), 2359—2376.

[170] R.S. Johnson, *Application of the ideas and techniques of classical fluid mechanics to some problems in physical oceanography*, Phil. Trans. R. Soc. A 376 (2018), 20170092.

[171] D. D. Joseph, "Stability of fluid motions I", Springer Verlag, New York, 1976.

[172] E. Kamke, "Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen", vol. I, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1967.

[173] A. M. Kamchatnov, R. A. Kraenkel, B. A. Umarov, *Asymptotic soliton train solutions of Kaup–Boussinesq equations*, Wave Motion 38 (2003), 355–365.

[174] D. J. Kaup, *A higher-order water-wave equation and method for solving it*, Prog. Theor. Phys. 54 (1975), 396–408.

[175] K. E. Kenyon, *Shallow water gravity waves: a note on the particle orbits*, J. Oceanography 52 (1996), 353–357.

[176] W. Kinnersley, *Exact large amplitude capillary waves on sheets of fluids*, J. Fluid Mech. 77 (1976), 229–241.

[177] J. Ko, W. Strauss, *Effect of vorticity on steady water waves*, J. Fluid Mech. 608 (2008), 197–215.

[178] D. J. Korteweg, G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of lomg stationary waves*, Phil. Mag. 39 (1895), 422–443.

[179] H. Lamb, "Hydrodynamics", 6th ed. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1932.

[180] D. Lannes, "The Water Waves Problem. Mathematical Analysis and Asymptotics", Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.

[181] S. Leblanc, *Local stability of Gerstner's waves*, J. Fluid Mech. 506 (2004), 245–254.

[182] N.R. Lebovitz, A. Lifschitz, *Short-wavelength instabilities of Riemann ellipsoids*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 354 (1996), 927–950.

[183] D. Lewis, J. Marsden, R. Montgomery, T. Ratiu, *The Hamiltonian structre for dynamic free boundary problems*, Physica D 18 (1986), 391–404.

[184] Y. A. Li, *A shallow-water approximation to the full water wave problem*, Commun. Pure Appl. Math. 59 (2006), 1225–1285.

[185] A. Lifschitz, *On the instability of three-dimensional flows or an ideal incompressible fluid*, Phys. Lett. A 167 (1992), 465–474.

[186] Lifschitz A., Hameiri E., *Local stability conditions in fluid dynamics.*, Phys. Fluids 3 (1991), 2644—2651.

[187] A. Liftschitz, E. Hameiri, *Localized instabilities of vortex rings with swirl*, Comm. Pure Appl. Math. 46 (1993), 1379- 1408.

[188] S. Q. Liu, J. E. Zhang, *Deformations of semisimple bihamiltonian structures of hydrodynamic type*, J. Geom. Phys. 54 (2005), 427–453.

[189] M. S. Longuet-Higgins, *The trajectories of particles in steep, symmetric gravity waves*, J. Fluid Mech. 94 (1979), 497-517.

[190] R. Lukas, Pacific ocean equatorial currents, 1st edition of *Encyclopedia of Ocean Sciences*, volume 4, 2069–2076, Elsevier Ltd., 2001.

[191] J. C. Luke, *A variational principle for a fluid with a free surface*, J. Fluid Mech. 27 (1967), 395–397.

[192] J. Lighthill, "Waves in Fluids", Cambridge University Press, 2001.

[193] V. Lukomsky, I. Gandzha, D. Lukomsky, *Steep sharp-crested gravity waves on deep water*, Phys. Rev. Lett. 89 (2002), 164502.

[194] A. J. Majda, A. L. Bertozzi, "Vorticity and Incompressible Flow", Cambridge Texts Appl. Math., vol. 27, Cambridge University Press, 2002.

[195] Yu. I. Manin, *Algebraic Aspects of Nonlinear Differential Equations*, Sov. Prob. Mat. 11 (1978), 5–152.

[196] J. Marsden, A. Weinstein, *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Rep. Math. Phys. 5 (1974), 121–130.

[197] A.-V. Matioc, *An explicit solution for deep water waves with Coriolis effects*, J Nonlinear Math. Phys. 19 (2012), 1240005.

[198] A.-V. Matioc, *An exact solution for geophysical equatorial edge waves over a sloping beach*, J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012), 365501.

[199] J. P. McCreary, *Modeling equatorial ocean circulation*, Ann. Rev. Fluid Mech. 17 (1985), 359–409.

[200] J. W. Miles, *On Hamilton's principle for surface waves*, J. Fluid Mech. 83 (1977), 153–158.

[201] D. M. Milder, *A note regarding 'On Hamilton's principle for surface waves'*, J. Fluid Mech. 83 (1977), 159–161.

[202] G. Misiolek, *A shallow water equation as a geodesic flow on the Bott-Virasoro group*, J. Geom. Phys. 24 (1998), 203–208.

[203] K. Mohajer, *A note on traveling wave solutions to the two-component Camassa-Holm equation*, J. Nonliner Math. Phys. 16 (2009), 117–125.

[204] P. J. Morrison, *Mathematical Methods in Hydrodynamics and Integrability of Dynamical Systems*, edited by M. Tabor and Y. M. Treve (American Institute of Physics, New York, 1982), vol. 88 of AIP Conference Proceedings, 13–46.

[205] O. Mustafa, *On smooth traveling waves of an integrable two-component Camassa-Holm shallow water system*, Wave Motion 46 (2009), 397–402.

[206] Y. Nutku, *On a new class of completely integrable nonlinear wave equations. II. Multi-Hamiltonian structure*, J. Math. Phys. 28 (1987), 2579–2585.

[207] H. Okamoto, M. Shoji, "The mathematical theory of permanent progressive water waves", World Scientific, River Edge, N. J., 2001.

[208] P.J. Olver, Y. Nutku, *Hamiltonian structures for systems of hyperbolic conservation laws*, J. Math. Phys. 29 (1988), 1610.

[209] P. J. Olver, P. Rosenau, *Tri-Hamiltonian duality between solitons and solitary-wave solutions having compact support*, Phys. Rev. E 53 (1996), 1900–1906.

[210] J. Pedlosky, "Geophysical Fluid Dynamics, Springer, New York, 1979.

[211] R. T. Pollard, *Surface waves with rotation: An exact solution*, J. Geophys. Res. 75 (1970), 5895– 5898.

[212] P. I. Plotnikov, *Proof of the Stokes conjecture in the theory of surface waves*, Dinamika Sploshn. Sredy 57 (1982), 41–76 (in Russian); English transl.: Stud. Appl. Math, 108 (2002), 217–244.

[213] W. J. M. Rankine, *On the exact form of waves near the surface of deep water*, Phil. Trans. R. Soc. A 153 (1863), 127–138.

[214] R. Salmon, *Hamiltonian fluid mechanics*, Ann. Rev. Fluid Mech. 20 (1988), 225–256.

[215] F. Serre, *Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux*, La Houille blanche 3 (1953), 374–388 and 6 (1953), 830–872.

[216] A. B. Shabat, L. Martinez Alonso, *On the prolongation of a hierarchy of hydrodynamic chains*, in: A. B. Shabat et al. (Eds.), New Trends in integrability and partial solvability, Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop, Cadiz, Spain 2002, NATO Science Series, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 2004, 263–280.

[217] T.G. Shepherd, *Symmetries, conservation laws, and Hamiltonian structure in geophysical fluid dynamics*, Adv. Geophys 32 (1990), 287–338.

[218] V. Smirnov, "Cours de Mathématiques supérieures, Tome III, deuxième partie", Mir, Moscou, 1972.

[219] A Sommerfeld, "Mechanics of Deformable Bodies", New York: Academic Press Inc., 1950.

[220] J. J. Stoker, "Water Waves: The Mathematical Theory with Applications", Wiley-Interscience New-York, 1992.

[221] G. G. Stokes, *On the theory of oscillatory waves*, Trans. Camb. Phil. Soc. 8 (1847), 441–455. Reprinted in: G. G. Stokes, Mathematical and Physical Papers, Volume I. Cambridge University Press, 197–229, 1880.

[222] G. G. Stokes, *Considerations relative to the greatest height of oscillatory irrotational waves which can be propagated without change of form*, Math. Phys. Papers, vol I, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 225–228, 1880.

[223] W. Strauss, *Steady water waves*, Bull. Amer. Math. Soc. 47 (2010), 671–694.

[224] R. Stuhlmeier, *On edge waves in stratified water along a sloping beach*, J. Nonlinear Math. Phys. 18 (2011), 127–137.

[225] C.H. Su, C. S. Gardner, *Korteweg-de Vries equation and generalizations. III. Derivation of the Korteweg-de Vries equation and Burgers equation*, J. Math. Phys. 10 (1969), 536–539.

[226] G.P. Thomas, *Wave-current interactions: an experimental and numerical study*, J. Fluid Mech. 216 (1990), 505–536.

[227] P. D. Thompson, *The propagation of small surface disturbances through rotational flow*, Ann. NY Acad. Sci. 51 (1949), 463–474.

[228] J. F. Toland, *Stokes waves*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 7 (1996), 1–48.

[229] T. Tsuchida, T. Wolf, *Classification of polynomial integrable systems of mixed scalar and vector evolution equations: I*, J. Phys. A 38 (2005), 7691–7733.

[230] G. K. Vallis, "Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics", Cambridge University Press, 2006.

[231] J.-M. Vanden-Broeck, *Steep solitary waves in water of finite depth with constant vorticity*, J. Fluid Mech. 274 (1994), 339–348.

[232] K. L. Vaninsky, *Equations of Camassa-Holm type and Jacobi ellipsoidal coordinates*, Comm. Pure Appl. Math. 58 (2005), 1149–1187.

[233] E. Varvaruca, *On the existence of extreme waves and the Stokes conjecture with vorticity*, J. Differential Equations 246 (2009), 4043–4076.

[234] E. Wahlén, *A Hamiltonian formulation of water waves with constant vorticity*, Lett. Math. Phys. 79 (2007), 303–315.

[235] E. Wahlén, *Hamiltonian long-wave approximations of water waves with constant vorticity*, Phys. Lett. A 372 (2008), 2597–2602.

[236] E. Wahlén, *Steady water waves with a critical layer*, J. Differential Equations 246 (2009), 2468–2483.

[237] E. Wahlén, *Non-existence of three-dimensional travelling water waves with constant non-zero vorticity*, J. Fluid Mech. 746 (2014), R2.

[238] J. Wilkening, V. Vasan, *Comparison of five methods of computing the Dirichlet-Neumann operator for the water wave problem*, in Nonlinear wave equations: analytic and computational techniques, 175–210, Contemp. Math., 635, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[239] G. B. Whitham, *Variational methods and applications to water waves*, Proc. Roy. Soc. London A 299 (1967), 6–25.

[240] G. B. Whitham, "Lecture on Wave Propagation", New York: Springer (published for Tata Institute of Fundamental Research), 1979.

[241] C. S. Yih, *Note on edge waves in a stratified fluid*, J. Fluid Mech. 24, 765-–767, 1966.

[242] V. E. Zakharov, *Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid*, Zh. Prokl. Mekh. Tekh. Fiz. 9 (1968), 86-94.

[243] V. E. Zakharov, E. A. Kuznetsov, *Hamiltonian formalism for nonlinear waves*, Physics-Uspekhi 40 (1997), 1087–1116.

[244] V. E. Zakharov, *The Inverse Scattering Method*, In: Solitons (Topics in Current Physics, vol 17) ed. R. K. Bullough and P. J. Caudrey (Berlin: Springer, 1980), 243–285.

[245] E. Zeidler, *Existenzbeweis für permanente Kapillar-Schwerewellen mit allgemeinen Wirbelverteilungen*, Arch. Rational Mech. Anal. 50 (1973), 34–72.