ACADEMIA ROMÂNĂ
SCOSAAR

TEZĂ DE ABILITARE

Aspecte combinatoriale în algebră şi teoria numerelor

Mircea Cimpoeaş

Domeniul fundamental: Matematică şi ştiinţe ale naturii

Domeniul de abilitare: Matematică

Teză elaborată în vederea obţinerii atestatului de abilitare în scopul conducerii lucrărilor de doctorat în domeniul Matematică

BUCUREŞTI, 2019

Rezumat

Teza mea este organizată astfel: În primul capitol, introduc definiţiile şi proprietăţile de bază care vor fi utilizate ulterior. În secţiunea 1.1 definesc noţiunea de Stanley depth (sdepth) al unui modul multigraduat M peste inelul de polinoame $S := K[x_1, \dots, x_n]$ şi enunţ conjectura Stanley, i.e. $\operatorname{sdepth}(M) \geq \operatorname{depth}(M)$. Aceasta s-a dovedit a fi falsă în cazul general (vezi [**DGKM16**]), dar rămâne deschisă dacă $M = I$ este un ideal monomial. În secţiunea 1.2 definesc funcţia de partiţie restricţionată $p_{\mathbf{a}}(n)$ asociată unui şir de numere naturale pozitive $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r)$. De asemenea, reamintesc noţiunea de inel toric asociat şi de număr Frobenius asociat semigrupului numeric $\langle \mathbf{a} \rangle = \mathbb{N}a_1 + \cdots + \mathbb{N}a_r$. In secţiunea 1.3, reamintesc definiţia seriilor Dirichlet, proprietăţile lor de bază şi contexte în care acestea apar în teoria numerelor.

În capitolul 2 prezint rezultatele mele legate de sdepth-ul idealelor monomiale (şi a inelelor cât asociate); un survey al rezultatelor mele mai vechi pe această temă este [**Cim13b**]. În secţiunea 2.1 descriu cazul idealelor monomiale de tip intersecţie completă; vezi [**Cim08a**], [**Cim08b**], [**Cim09b**] [**Cim12a**] şi [**Cim14a**]. În secţiunea 2.2 prezint rezultatele mele legate de sdepth-ul idealelor monomiale de tip Veronese libere de pătrate. În seţiunea 2.3 prezint mai multe inegalităţi legate de sdepth pentru sume, interseţii etc. de ideale monomiale (respectiv pentru inelele cât corespunzătoare); vezi [**Cim12b**]. În seţiunea 2.4 prezint rezultatele din [**Cim18b**] privind sdepth-ul puterilor de ideale monomiale de forma $I + J$, unde I şi J sunt ideale monomiale în mulţimi distincte de variabile. În seţiunea 2.5 discut sdepth-ul idealelor de tip Borel; vezi [**Cim18c**]. În secţiunea 2.6 prezint o margine superioară combinatorială (uşor de calculat) pentru sdepth-ul unui cât de ideale, pe care o numesc quasi-depth (qdepth), introdusă în lucrările [**Cim15**] şi [**Cim16a**]. De remarcat faptul că, în contraexemplele la conjectura Stanley găsite de Duval et.al [**DGKM16**], qdepth-ul este strict mai mic decât depth-ul. În secţiunea 2.7 prezint rezultatele mele legate de sdepth-ul idealelor monomiale asociate mulţimilor independente dintr-un graf; vezi [**Cim16a**]. În secţiunea 2.8 prezint rezultate privind sdepth-ul idealelor muchiilor (edge ideals) şi idealelor drumurilor (path ideals) ale grafurile linie şi ciclu; vezi [**Cim15**], [**Cim16b**] şi [**Cim17**]. În seţiunea 2.9 prezint rezultatele mele din [**Cim18a**] şi [**Cim18d**] privind invarianţii algebrici şi sdepth-ul idealelor de forma $I = (x_{a_1} \cdots x_{b_1}, x_{a_2} \cdots x_{b_2}, \ldots, x_{a_r} \cdots x_{b_r})$, unde $a_1 < a_2 < \ldots < a_r$ şi $b_1 < b_2 < \cdots < b_r$. În secţiunea 2.10 prezint rezultatele din [**Cim19c**] privind legătura dintre operatorul de polarizare şi operatorul square-free aplicate idealelor monomiale.

În capitolul 3, seţiunea 3.1, prezint rezultatele privind funcţia de partiţie restricţionată $p_{\mathbf{a}}(n) :=$ numărul de soluţii întregi $(x_1, \ldots, x_r)$ ale ecuaţiei $\sum_{j=1}^{r} a_j x_j = n$ cu $x_1 \geq 0, \ldots, x_r \geq 0$, rezultate obţinute în colaborare cu Florin Nicolae [**CimN18**], şi continuate singur într-o serie de preprinturi [**Cim19d**], [**Cim19e**], [**Cim19f**] şi [**Cim19g**]. Rezultatul principal din [**CimN18**] este o nouă formulă pentru $p_{\mathbf{a}}(n)$ în termeni de soluţii de congruenţe modulo D, unde D este un multiplu comun al numerelor naturale pozitive $a_1, \ldots, a_r$. Ca o ilustrare a metodei noastre, redemonstrăm câteva rezultate clasice din literatură şi extindem altele. În [**Cim19d**], prezint alte aplicaţii ale formulei lui $p_{\mathbf{a}}(n)$ găsite în [**CimN18**], de exemplu noi formule pentru "undele lui Sylvester" (Sylvester waves), precum şi o formulă precisă a funţiei $p_{\mathbf{a}}(n)$ în cazul când numerele $a_1, \ldots, a_r$ sunt prime două câte două. În seţiunea 3.2, prezint rezultatele obţinute cu Dumitru Stamate în [**CimS16**], cel principal fiind că pentru o familie de ideale torice de tip intersecţie completă asociate unor semigrupuri numerice "translatate" $\langle \mathbf{a} + k \rangle = \mathbb{N}(a_1 + k) + \cdots + \mathbb{N}(a_r + k)$, intersecţia unei familii arbitrare de asemenea ideale este de tot un ideal intersecţie completă.

În secţiunea 4.1,prezint rezultatele mele legate de independeţa liniară (algebrică), peste unele corpuri de funcţii meromorfe, a unor clase de serii de funcţii, care generalizează seriile Dirichlet; vezi [**Cim19a**]. Aceste rezultate extind metodele folosite în [**CimN19**], unde, împreună cu Florin Nicolae, am arătat că dacă $\chi_1, \ldots, \chi_h$ sunt caracterele ireductibile ale grupului Galois asociat unei extinderi Galois $K/\mathbb{Q}$, atunci L-funcţiile Artin asociate sunt algebric independente peste corpul de funcţii meromorfe de ordin < 1; vezi seţiunea 4.2. De remarcat faptul că acest ultim rezultat generalizează un rezultat al lui Florin Nicolae [**Nic01**] în care acesta a demonstrat independenţa algebrică peste $\mathbb{C}$. În seţiunea 4.3, care urmează [**Cim19b**], prezint proprietăţi ale inelului toric al L-funcţiilor Artin olomorfe într-un punct $s_0 \in \mathbb{C}$, peste corpul de funcţii meromorfe de ordin < 1, extinzând câteva rezultate anterioare ale lui Florin Nicolae, vezi [**Nic08**] şi [**Nic18**]. În capitolul 5, prezint câteva probleme deschise şi direcţii de cercetare, legate de rezultatele mele.

Bibliography

[CoCoA] J. Abbott, A. M. Bigatti, L. Robbiano, *CoCoA: a system for doing Computations in Commutative Algebra*, Available at http://cocoa.dima.unige.it

[Alf] J. L. Ramrez Alfonsn, *The Diophantine Frobenius Problem*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 30 (2005).

[Ami61] S. A. Amitsur, *Groups with representations of bounded degree II*, Illinois J. Math. **5**, (1961), pag. 198–205.

[Ap03] J. Apel, *On a conjecture of R. P. Stanley; Part II - Quotients Modulo Monomial Ideals*, J. of Alg. Comb. **17**, (2003), pag. 57–74.

[Apo76] T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, UTM, Springer-Verlag, (1976).

[Art24] E. Artin, *Über eine neue Art von L-Reihen*, Abh. Math. Sem. Hamburg **3** (1924), pag. 89–108.

[Art31] E. Artin, *Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren*, Abh. Math. Sem. Hamburg **8** (1931), pag. 292–306.

[Bar04] E. W. Barnes, *On the theory of the multiple gamma function*, Trans. Camb. Philos. Soc. **19** (1904), pag. 374–425.

[BB14] A. Bayad, M. Beck, *Relations for Bernoulli-Barnes Numbers and Barnes Zeta Functions*, International Journal of Number Theory **10** (2014), par. 1321–1335.

[BGK01] M. Beck, I. M. Gessel, T. Komatsu, *The polynomial part of a restricted partition function related to the Frobenius problem*, Electronic Journal of Combinatorics **8 , no. 1** (2001), N 7 (5 pages).

[Bel43] E. T. Bell, *Interpolated denumerants and Lambert series*, Am. J. Math. **65** (1943), pag. 382–386.

[Ber92] S. K. Berberian, *Number-Theoretic Functions via Convolution Rings*, Mathematics Magazine, **Vol. 65, No. 2**, (1992), pp. 75-90.

[BG06] I. Bermejo, P. Gimenez, *Saturation and Castelnuovo-Mumford regularity*, J. Algebra **Volume 303, Issue 2** (2006), pag. 592–617.

[BHKTY10] C. Biro, D. M. Howard, M. T. Keller, W. T. Trotter, S. J. Young, *Interval partitions and Stanley depth*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **vol 117, Issue 4**, (2010), pag. 475–482.

[Bra24] R. Brauer, *On Artin's L-series with general group characters*, Ann.of Math (2) **48**, (1924), 502–514.

[BKU10] W. Bruns, C. Krattenthaler, J. Uliczka, *Stanley decompositions and Hilbert depth in the Koszul complex*, J. Commut. Algebra **Volume 2, Number 3**, (2010), p. 327–357.

[BKU11] W. Bruns, C. Krattenthaler, J. Uliczka, *Hilbert depth of powers of the maximal ideal*, Commutative Algebra and its Connections to Geometry (PASI 2009), Contemporary Mathematics, **vol. 555**, Amer. Math. Soc., R.I., 2011, p. 1–12.

[CW05] K. Cameron, T. Walker, *The graphs with maximum induced matching and maximum matching the same size*, Discrete Math. **299** (2005), pag. 49–55.

[CE59] E. D. Cashwell, C. J. Everett, *The ring of number-theorethic functions*, Pacific J. Math. **9**, (1959), pag. 975–985.

[CE63] E. D. Cashwell, C. J. Everett, *Formal power series*, Pacific J. Math. **13(1)**, (1963), pag. 45–64.

[CS05] G. Caviglia, E. Sbarra, *Characteristic-free bounds for the Castelnuovo Mumford regularity*, Compos. Math. **141, no.6** (2005), 1365–1373.

[Cim08a] M. Cimpoeaş, *Some remarks on the Stanley's depth of multigraded modules*, Le Matematiche **63(2)** (2008), pag. 165 – 171.

[Cim08b] M. Cimpoeaş, *Stanley depth of complete intersection monomial ideals*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **51(99)(3)** (2008), pag. 205 – 211.

[Cim08c] M. Cimpoeaş, *A stable property of Borel type ideals*, Communications in Algebra **36(2)** (2008), pag. 674 – 677.

[Cim09a] M. Cimpoeaş, *Some remarks on Borel type ideals*, Communications in Algebra **37(2)** (2009), pag. 724 – 727.

[Cim09b] M. Cimpoeaş, *Stanley depth of monomial ideals with small number of generators*, Central European Journal of Mathematics **7(4)** (2009), pag. 629 – 634.

[Cim12a] M. Cimpoeaş, *The Stanley conjecture on monomial almost complete intersection ideals*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **55(103)(1)** (2012), pag. 35 – 39.

[Cim12b] M. Cimpoeaş, *Several inequalities regarding Stanley depth*, Romanian journal of mathematics and computer science **2(1)** (2012), pag. 28 – 40.

[Cim13a] M. Cimpoeaş, *Stanley depth of squarefree Veronese ideals*, An. St. Univ. Ovidius Constanta seria matematica **21(3)** (2013), pag. 67 – 71.

[Cim13b] M. Cimpoeaş, *On the Stanley depth of monomial ideals*, Revue Roumaine de math. pure et appliques **58(2)** (2013), pag. 205 – 212.

[Cim14a] M. Cimpoeaş, *Stanley Depth of Quotient of Monomial Complete Intersection Ideals*, Communications in Algebra **40(8)** (2014), pag. 2720 – 2731.

[Cim14b] M. Cimpoeaş, *Regularity of quasi-symbolic and bracket powers of Borel type ideals*, Rom. J. Math. Comput. Sci. **4(1)** (2014), pag. 73 – 80.

[Cim15] M. Cimpoeaş, *On the Stanley depth of edge ideals of line and cyclic graphs*, Romanian Journal of Mathematics and Computer Science **5(1)** (2015), pag. 70 – 75.

[CimS16] M. Cimpoeaş, D. Stamate, *On intersection of complete intersection ideals*, Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 220, Issue 11, November (2016), pag. 3702-3712.

[Cim16a] M. Cimpoeaş, *On the quasi-depth of squarefree monomial ideals and the sdepth of the monomial ideal of independent sets of a graph*, An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi Mat., **62, vol 3** (2016), pag. 863-870.

[Cim16b] M. Cimpoeaş, *On The Stanley Depth Of The Path Ideal Of A Cycle Graph*, Romanian Journal of Mathematics and Computer Science **6(2)** (2016), pag. 116 – 120.

[FR06] L. G. Fel, B. Y. Rubinstein, *Restricted partition functions as Bernoulli and Eulerian polynomials of higher order*, Ramanujan J. **11(3)** (2006), pag. 331–347.

[EHQ18] V. Ene, J. Herzog, A. A. Qureshi, *t-spread strongly stable monomial ideals*, ArXiv e-prints (2018), https://arxiv.org/pdf/1805.02368.pdf

[Far02] S. Faridi, *The facet ideal of a simplicial complex*, Manuscripta Mathematica **109** (2002), pag. 159–174.

[GAP] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.10.1*; 2019, (https://www.gap-system.org)

[GPW99] V. Gasharov, I. Peeva, V. Welker, *The lcm-lattice in monomial resolutions*, Math. Res. Lett. **5-6** (1999), pag. 521–532.

[Gla08] J. W. L. Glaisher, *Formulae for partitions into given elements, derived from Sylvesters theorem*, Quart. J. Pure Appl. Math. **40** (1908), pag. 275–348.

[HT10] Jing He, Adam Van Tuyl, *Algebraic properties of the path ideal of a tree*, Comm. Algebra **38 no.5** (2010), pag. 1725–1742.

[Her70] J. Herzog, *Generators and relations of Abelian semigroups and semigroup rings*, Manuscripta Math. **3** (1970), pag. 175–193.

[HH05] J. Herzog, T. Hibi, *The depth of powers of an ideal, J. Algebra* **291** (2005), no. 2, pag. 534–550.

[HP06] J. Herzog, D. Popescu, *Finite filtrations of modules and shellable multicomplexes*, Manuscripta Math. **121** (2006), 385–410.

[HPV03] J. Herzog, D. Popescu, M. Vladoiu, On the Ext-Modules of ideals of Borel type, Contemporary Math. 331 (2003), 171-186.

[HS2014] J. Herzog, D. I. Stamate, *On the defining equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring*, J. Algebra **418** (2014), pag 8–28.

[HVZ09] J. Herzog, M. Vladoiu, X. Zheng, *How to compute the Stanley depth of a monomial ideal*, Journal of Algebra **322(9)** (2009), pag. 3151–3169

[GW17] Yan Gu, Xiaoqi Wei, *Depth and Stanley depth of the facet ideals of some classes of simplicial complexes*, Czechoslovak Mathematical Journal **Vol. 67, No. 3** (2017), pag. 753–766.

[IKM17] B. Ichim, L. Katthän, J. J. Moyano-Fernandez, *Stanley depth and the lcm-lattice*, J. Combin. Theory Ser. A 150 (2017), 295–322.

[IKM16] B. Ichim, L. Katthän, J. J. Moyano-Fernández, *LCM Lattices and Stanley Depth: A First Computational Approach*, Experimental Mathematics, vol **25(1)**, (2016), 46-53.

[JS13] A.V. Jayanthan, H. Srinivasan, *Periodic occurence of complete intersection monomial curves*, Proc. Amer. Math. Soc. **141, no 12** (2013), pag. 4199–4208.

[KMP99] J. Kaczorowski, G. Molteni, A. Perelli, *Linear independence in the Selberg class*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **21**, (1999), 28–32.

[KMP06] J. Kaczorowski, G. Molteni, A. Perelli, *Linear independence of L-functions*, Forum Mathematicum **18**, (2006), 1–7.

[Cim17] M. Cimpoeaş, *Stanley depth of the path ideal associated to a line graph*, Mathematical Reports **vol.19(2)** (2017), pag. 7.

[Cim18a] M. Cimpoeaş, *A class of square-free monomial ideals associated to two integer sequences*, Communications in Algebra **Volume 46, Issue 3** (2018), 1179-1187.

[Cim18b] M. Cimpoeaş, *On the Stanley depth of powers of some classes of monomial ideals*, Bull. Iranian Math. Soc. **44 , no. 3** (2018), pag. 739–747.

[Cim18c] M. Cimpoeaş, *On the Stanley depth of a special class of Borel type ideals*, An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi Mat., **64, vol 3** (2018), pag. 369–372.

[Cim18d] M. Cimpoeaş, *Stanley depth of certain classes of square-free monomial ideals*, Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys. **80 , no. 2** (2018), pag. 33–40.

[CimN18] M. Cimpoeaş, F. Nicolae, *On the restricted partition function*, Ramanujan Journal **47 , no. 3** (2018), 565–588.

[CimN19] M. Cimpoeaş, F. Nicolae, *Independence of Artin L-functions*, Forum Mathematicum **31, no. 2** (2019), 529–534.

[Cim19a] M. Cimpoeaş, *A note on the linear independence of a class of series of functions*, The Journal of Analysis (2019), https://doi.org/10.1007/s41478-019-00169-1

[Cim19b] M. Cimpoeaş, *On the semigroup ring of holomorphic Artin L-functions*, to appear in Colloquium Mathematicum (2019).

[Cim19c] M. Cimpoeaş, *Polarization and spreading of monomial ideals*, to appear in Communications in Algebra (2019).

[Cim19d] M. Cimpoeaş, *Remarks on the restricted partition function*, to appear in Mathematical Reports (2019).

[Cim19e] M. Cimpoeaş, *On the restricted partition function via determinants with Bernoulli polynomials*, to appear in Mediterranean Journal of Mathematics, Preprint (2019),

[Cim19f] M. Cimpoeaş, *On the restricted partition function via determinants with Bernoulli polynomials II*, Preprint (2019),

[Cim19g] M. Cimpoeaş, *Determinants with Bernoulli polynomials and the restricted partition function*, Preprint (2019),

[Com74] L. Comtet, *Advanced combinatorics: The art of finite and infinite expansions*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht. Holland; Boston, Mass. (1974).

[Del76] C. Delorme, *Sous-monoïdes d'intersection complète de N*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **9, no. 1** (1976), pag. 145–154.

[Singular] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann, SINGULAR 3-1-6 — A computer algebra system for polynomial computations. http://www.singular.uni-kl.de (2012).

[DV17] K. Dilcher, C. Vignat, *An explicit form of the polynomial part of a restricted partition function*, Res. Number Theory **3:1** (2017), 12pp.

[DGKM16] A. M. Duval, B. Goeckneker, C. J. Klivans, J. L. Martine, *A non-partitionable Cohen-Macaulay simplicial complex*, Advances in Mathematics, vol **299** (2016), pag. 381–395.

[Kal02] G. Kalai, *Algebraic shifting. In: Computational commutative algebra and combinatorics*, T. Hibi, (ed.), Adv. Stud. Pure Math. 33, Math. Soc. Japan, Tokyo (2002).

[KSSY11] M. T. Keller, Y. Shen, N. Streib, S. J. Young *On the Stanley depth of squarfree Veronese ideals*, Journal of Algebraic Combinatorics, **Volume 33, Issue 2** (2011), pag. 313–324.

[Kom03] T. Komatsu, *On the number of solutions of the Diophantine equation of Frobenius: general case*, Math. Commun. **8, no. 2**, (2003), 195–206.

[Map13] S. Mapes, *Finite atomic lattices and resolutions of monomial ideals*, J. Algebra **379** (2013), pag. 259–276.

[Mol04] G. Molteni, *General linear independence of a class of multiplicative functions*, Arch. Math. **83** (2004), pag. 27–40.

[Nic01] F. Nicolae, *On Artins's L-functions. I*, J. reine angew. Math. **539** (2001), pag. 179–184.

[Nic08] F. Nicolae, *On the semigroup of Artin's L-functions holomorphic at* s_0, Journal of Number Theory **128**, (2008), pag. 2861–2864.

[Nic18] F. Nicolae, *On holomorphic Artin L-functions*, Monatsh. Math. **186, no. 4**, (2018), pag. 679–683.

[Oka11] R. Okazaki, *A lower bound of Stanley depth of monomial ideals*, J. Commut. Algebra **vol. 3, no. 1**, (2011), pag. 83–88.

[Olt18] O. Olteanu, *The monomial ideal of independent sets associated to a graph. Multigraded algebra and applications*, Springer Proc. Math. Stat., **238**, Springer, Cham, (2018), pag. 111–123.

[Osu15] C. O'Sullivan, *On the partial fraction decomposition of the restricted partition generating function*, Forum Mathematicum, **Volume 27, Issue 2**, (2015), pag. 735–766.

[APop10] A. Popescu, *Special Stanley decompositions*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **53(101), No. 4** (2010), pag. 363–372.

[DPop14] D. Popescu, *Depth of factors of square free monomial ideals*, Proc. Amer. Math. Soc. **142** (2014), 1965–1972.

[Pop53] T. Popoviciu, *Asupra unei probleme de partiţie a numerelor*, Acad. Republicii Populare Române, Filiala Cluj, Studii şi cercetări ştiinţifice (Romanian) **4** (1953), pag. 7–58.

[Rac96] M. Raczunas, P. Chrząstowski-Wachtel, *A diophantine problem of Frobenius in terms of the least common multiple*, Discrete Math. **150** (1996), 347–357.

[Rauf10] A. Rauf, *Depth and sdepth of multigraded module*, Communications in Algebra, **vol. 38, Issue 2** (2010), pag. 773–784

[Rauf07] A. Rauf, *Stanley Decompositions, Pretty Clean Filtrations and Reductions Modulo Regular Elements*, Bull. Math. Soc. Sc. Math. Roumanie, **50(98)** (2007), pag. 347–354.

[Rho93] S. L. Rhoades, *A generalization of Aramata-Brauer theorem*, Proc. Amer. Mathe. Soc. **119** (1993), pag. 357–364.

[Rin08] G. Rinaldo, *An algorithm to compute the Stanley depth of monomial ideals*, Le Matematiche, **Vol. LXIII (ii)** (2008), 243–256.

[Rub08] B. Y. Rubinstein, *Expression for restricted partition function through Bernoulli polynomials*, Ramanujan J., **15(2)** (2008), 177–185.

[Rui00] S. N. M. Ruijsenaars, *On Barnes' Multiple Zeta and Gamma Functions*, Advances in Mathematics **156** (2000), pag. 107–132.

[Shen09] Y. Shen, *Stanley depth of complete intersection monomial ideals and upper-discrete partitions*, Journal of Algebra **321**, (2009), pag. 1285–1292.

[Sta74] H. M. Stark, *Some effective cases of the Brauer-Siegel theorem*, Invent. Math. **23**, (1974), pag. 135–152.

[Spr09] M. Spreafico, *On the Barnes double zeta and Gamma function*, J. Numb. Theory **129, no.9** (2009), 2035–2063.

[Sta16] D. I. Stamate, *Asymptotic properties in the shifted family of a numerical semigroup with few generators*, Semigroup Forum **93, no. 2** (2016), pag 225–246.

[Stan82] R. P. Stanley, *Linear Diophantine equations and local cohomology*, Invent. Math. **68** (1982), pag. 175–193.

[Ste14] A. Ştefan, *Stanley depth of powers of the edge ideal*, Preprint (2014), http://arxiv.org/pdf/1409.6072.pdf.

[Stein03] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex analysis*. Princeton Lectures in Analysis II, (2003).

[Stu95] B. Sturmfels, *On Vector Partition Functions*, Journal of Combinatorial theory, Series A **72** (1995), pag. 302–309.

[Syl57] J. J. Sylvester, *On the partition of numbers*, Quart. J. Pure Appl. Math. **1** (1857), 141–152.

[Syl82] J. J. Sylvester, *On subinvariants, i.e. semi-invariants to binary quatities of an unlimited order with an excursus on rational fractions and partitions*, Am. J. Math. **5** (1882), 79–136.

[Tri06] A. Tripathi, *On a linear diophantine problem of Frobenius*, Electronic Journal of combinatorial number theory **6**, (2006), 6 pages.

[Vil01] R. Villareal *Monomial Algebras*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 238, Marcel Dekker Inc., New York, (2001).

[Vu14] T. Vu, *Periodicity of Betti numbers of monomial curves*, J. Algebra **418** (2014), 66–90.