



ACADEMIA ROMÂNĂ
SCOSAAR

TEZĂ DE ABILITARE

Obiecte sofice - rezumat in limba română

Liviu Păunescu

Domeniul fundamental: Matematică și științe ale naturii

Domeniul de abilitare: Matematică

Teză elaborată în vederea obținerii atestatului de abilitare în scopul conducerii lucrărilor de doctorat în domeniul Matematică

BUCUREȘTI, 2018

OBIECTE SOFICE - REZUMAT

LIVIU PĂUNESCU

În timpul studiilor doctorale, împreună cu Valerio Capraro, am descris o metoda de a folosi *produsul de ultrafiltre* pentru a ocoli anumite argumente diagonale. Aceasta construcție ne-a permis să obținem demonstrații considerabil mai ușoare pentru unele rezultate ale lui Rădulescu (Corolarul 2.12 din [CP12]). De asemenea, am construit scufundări în ultraproducte pentru câteva obiecte neseparabile. Nu este pentru prima dată când produsul de ultrafiltre a fost folosit în modul acesta, dar se pare că nimeni nu a folosit aceste tehnici în algebrele de operatori. Acest articol este un exemplu de cum metode de analiză nonstandard, produsul de ultrafiltre, pot fi folosite pentru a obține rezultate în teoria proprietăților metrice de aproximare. Metoda este descrisă în Secțiunea 1.4.7 din Capitolul 1.

În [EL10], Elek și Lippner au definit conceptul de *relație de echivalență sofice* folosind metode combinatoriale. În [Pau11], am adus această noțiune într-un limbaj deschis comunității de algebre de operatori. Împreună cu rezultate din [EL10], am obținut o demonstrație simplificată a faptului că produsul amalgamat de grupuri sofice peste un subgrup amenabil este din nou sofice. Din nou, tehnicile de ultraproducte sunt esențiale pentru metodele dezvoltate în articol. Limbajul necesar și rezultatele preliminare sunt prezentate la sfârșitul primului capitol, în timp ce rezultatele articolului sunt prezentate în secțiunea 2.1 din Capitolul 2.

Am introdus în [Pau14a] o structură convexă în sensul lui Nate Brown, pe spațiul reprezentărilor sofice, notat cu $Sof(G)$. Am demonstrat că dacă comutantul unei reprezentări sofice $\theta : G \rightarrow \prod_{k \rightarrow \omega} P_{n_k}$ acționează ergodic pe spațiul Loeb $\prod_{k \rightarrow \omega} D_{n_k}$ atunci clasa lui θ în $Sof(G)$ este un punct extremal. Combinat cu rezultate din [ES11], acest rezultat răspunde unei întrebări a lui David Kerr și Hanfeng Li ce a apărut în contextul entropiei sofice (vezi [KL13, Teorema 5.2]). În [Pa16], am arătat o caracterizare completă a punctelor extreme din $Sof(G)$. Aceste rezultate sunt prezentate în Secțiunea 2.2, Capitolul 2.

În Secțiunea 5 din [Pau16], am arătat că dacă $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 = \langle a, b | b^2 = e \rangle$ și $\mathbb{F}_2 = \langle a, bab \rangle$ atunci aplicația de restricție $R : Sof(G) \rightarrow Sof(\mathbb{F}_2)$ nu este surjectivă. Acest rezultat arată o primă obstrucție către soficitate, o proprietate ce trebuie folosită. Toate construcțiile care păstrează soficitatea folosesc doar aplicații de restricție surjective. O demonstrație completă a acestui rezultat este prezentată în Secțiunea 2.4.

Împreună cu Goul'nara Arzhantseva, am definit noțiunea de *grupuri liniar sofice*, o extensie naturală, dar netrivială, a conceptului de grup sofice, [AP17a]. Liniar soficitatea este acum o proprietate metrică de aproximare importantă. Definițiile de bază și rezultatele sunt continuate în Secțiunea 2.5

Un obiectiv important al cercetării mele este găsirea unor relații de echivalență mai bune pe mulțimea reprezentărilor sofice decât cele folosite în articolele [Pau14a] și [Pau16]. Studiul automorfismelor grupului sofice universal din lucrarea [Pau14b] este motivat de acest obiectiv. Rezultatul este prezentat în Secțiunea 2.5.

În articolul [AP15], în comun cu Goul'nara Arzhantseva, am demonstrat că relația de comutare este stabilă în permutări prevăzute cu distanța Hamming. Acest lucru înseamnă că dacă avem două permutări

$p, q \in \text{Sym}(n)$ astfel incat $pq(i) = qp(i)$ pentru aproape toate numerele $i \in \{1, \dots, n\}$, putem gasi alte doua permutari $p_1, q_1 \in \text{Sym}(n)$ aproape de cele originale astfel incat $p_1q_1 = q_1p_1$. Desi acest rezultat este elementar, este aparent imposibil de prezentat o demonstratie elementara. Metoda noastra combina folosirea spatiului Loeb si proprietatile ultrafiltrelor cu flexibilitatea teoriei masurii, pentru a obtine o demonstratie compacta pentru acesta proprietate de stabilitate. Un grup stabil, nerezidual finit, nu poate fi sofice. Aceasta este motivatia autorilor in studiul rezultatelor de stabilitate. Sectiunea 2.6 contine o demonstratie completa.

Impreuna cu Florin Rădulescu, am generalizat teorema Birkhoff - von Neumann intr-un context de tip II_1 , [PR17]. Teorema clasica Birkhoff -von Neumann spune ca matricile de permutare sunt puncte extremale in multimea matricilor dublu stocastice (matrici cu elemente pozitive si suma pe fiecare linie si coloana este egala cu 1). In articolul nostru lucram cu un spatiu de probabilitate standard (X, μ) si o relatie de echivalenta ce pastreaza masura $E \subset X^2$. O functie $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o *matrice generalizata*. Definitia matricii dublu stocastice este aceasi: f este *dublu stocastica* daca $\sum_{z \in E_x} f(x, z) = 1 = \sum_{z \in E_y} f(z, y)$ pentru orice $x, y \in X$. O matrice de permutare este o astfel de functie f care ia doar valorile 0 si 1. Un astfel de obiect corespunde unui automorfism a lui (X, μ) , in acelasi mod in care o matrice de permutare corespunde unei bijectii pe o multime finita. Exemplu 2.8 din [PR17] arata ca teorema Birkhoff - von Neumann este falsa in acest context. Totusi o versiune mai slaba este adevarata, asa cum aratam prin metodele combinatorice dezvoltate in Sectiunea 3 din articol. Enunturile exacte sunt scrise in Sectiunea 2.7.

Este o intrebare deschisa daca grupurile hyperliniare sunt sofice. Articolul [Pau17] este motivat de aceasta intrebare. In aceasta lucrare studiez conditii in care un ultraproduct de unitari este conjugat cu un ultraproduct de permutari. Am prezentat o solutie combinatorica si una analitica pentru aceasta problema. Articolul este discutat in Sectiunea 2.8.

Impreuna cu Matteo Cavaleri si Radu Munteanu, am investigat structura spatiunii Loeb folosind *partea standard*, o unealta din analiza non-standard. Am definit un subgrup propriu al grupului sofice universal, numit \mathcal{GA} . Acest subgrup contine in continuare toate subgrupurile numarabile sofice si, mai mult, este o extensie prin $\text{Aut}(X, \mu)$. Natura acestei extensii de grupuri este obiectul cercetarii viitoare. Detaliile sunt prezentate in Sectiunea 2.9.

Intr-o lucrare comuna cu Goulnara Arzhantseva, [AP17b], am definit proprietati metrice *constranse* si am analizat intrebari legate de existenta si stabilitate. Proprietatile metrice constranse sunt definite cu ajutorul ecuatiilor cu coeficienti in grupuri astfel incat constrangerile prescrise sunt impuse solutiilor aproximative. Fiind o generalizare naturala, este si motivata de cateva probleme deschise despre aproximările metrice ale unor grupuri celebre precum grupul Higman, Burger-Mozes etc. Cateva exemple sunt discutate in Sectiunea 2.10.

(L. Păunescu) INSTITUTUL DE MATEMATICA AL ACADEMIEI ROMANE, CALEA GRIVITEI, NR. 21, 010702, BUCURESTI, ROMANIA

E-mail address: liviu.paunescu@imar.ro