ACADEMIA ROMÂNĂ
SCOSAAR

HABILITATION THESIS

Vanishing theorems on normal crossings varieties

Florin Ambro

Domeniul fundamental: Matematică şi ştiinţe ale naturii

Domeniul de abilitare: Matematică

Teză elaborată în vederea obţinerii atestatului de abilitare în scopul conducerii lucrărilor de doctorat în domeniul Matematică

BUCUREŞTI, 2018

Rezumat

Geometria Algebrică este un domeniu fundamental al Matematicii. Studiază locul comun al zerourilor unor polinoame in spaţiul afin sau proiectiv. Este strâns legată de alte domenii ale Matematicii, de exemplu Teoria Numerelor, Geometria Complexă sau Geometria Diferenţială, sau cu Fizica, de exemplu Teoria Stringurilor.

Subiectul meu de cercetare este **Teoria de Clasificare a Varietăţilor Algebrice**, un subdomeniu central al Geometriei Algebrice. Teoria de clasificare alege anumite modele minimale, considerate a fi cele mai simple, dar din care toate varietăţile se pot construi (*Teoria Modelelor Minimale*), şi apoi descrie complet aceste obiecte minimale (Probleme de Scufundare, Clasificarea Singularităţilor, Probleme de Moduli).

Clasificarea varietăţilor algebrice complexe se bazează pe teoreme de anulare de tip Kodaira pentru divizori Cartier de tipul $L \sim_{\mathbb{Q}} K_X + B$, unde (X, B) este o varietate logaritmic netedă. Pentru argumente inductive in studiul sistemelor liniare, sau in studiul degenerărilor varietăţilor logaritmice netede, este necesar să extindem teoremele de anulare la cazul când (X, B) este mai singular, in special când X nu este normal. Această Teză de Abilitare este o colecţie de cinci lucrări [6, 7, 8, 5, 9], cu scopul final de a demonstra teoremele de anulare in cazul când (X, B) este of varietate logaritmică cu intersecţii normale. Putem considera varietăţile logaritmice cu intersecţii normale ca fiind lipiri de varietăţi logaritmice netede, in cel mai simplu mod posibil. Teoremele de anulare se obţin in doi paşi: cazul logaritmic neted rezultă din Teoria Hodge, iar cazul cu intersecţii normale se reduce la cazul logaritmic neted prin metode simpliciale.

O aplicaţie a rezultatelor acestei teze este imbunatăţirea rezultatelor din [3, Section 3]. Am demonstrat acolo rezultate mai slabe, sub ipoteza suplimentară că X este global scufundat ca divizor cu intersecţii normale într-o varietate netedă. In această teză eliminăm aceasta ipoteză globală suplimentară.

Primele cinci capitole corespund la articolele menţionate mai sus. Capitolul 6 conţine planuri si direcţii de cercetare pe viitor. Schiţăm mai jos conţinutul primelor cinci capitole.

Capitolul 1 prezintă cunoscutul truc al acoperirilor ciclice, cu anumite îmbunătăţiri. Trucul acoperirilor ciclice este un instrument clasic folosit pentru a reduce demonstraţia anumitor proprietăţi ale varietăţilor logaritmic netede (X, B) la cazul când B are coeficienţi doar 0 sau 1. Partea originală a expunerii noastre este că trucul funcţionează in categoria scufundărilor toroidale quasi-netede. Vom folosi aceste rezultate in Capitolul 4.

Capitolul 2 introduce varietăţile torice afine care nu sunt neapărat normale. Ele sunt definite ca spectrul unui inel cu faţete torice. Inelele cu faţete torice sunt o generalizare

naturală a inelelor Stanley, studiate intens in algebra combinatorică. Prezentăm rezultate algebrice cunoscute într-un limbaj geometric, în special criteriile de normalitate slabă si seminormalitate. Definim varietăţile slab toroidale ca fiind acele varietăţi care sunt local analitic izomorfe cu varietăţile torice afine slab normale. Pentru varietăţi slab toroidale, construim un complex Du Bois explicit, ce poate fi folosit in calcularea cohomologiei singulare a acestor varietăţi. In particular, aceste varietăţi au singularităţi Du Bois, un rezultat folosit in Capitolul 5.

Capitolul 3 introduce noua clasă a varietăţilor slab log canonice, care generalizează varietăţile log canonice şi semi-log canonice. Clasificăm varietăţile slab toroidale care au singularităţi slab log canonice. Pe parcurs, găsim un criteriu necesar si suficient pentru ca o varietate torică afină să satisfacă proprietatea S_2 a lui Serre. Definim reziduuri in codimensiune unu pentru varietăţi slab log canonice. Introducem clasa singularităţilor n-wlc, pentru care putem defini reziduuri in orice codimensiune. Vom folosi acest rezultat in Capitolul 5.

Capitolul 4 prezintă teorema de injectivitate Esnault-Viehweg, cu anumite îmbunătăţiri. Demonstraţia este similară cu cea dată de Esnault-Viehweg: modulo trucul acoperirilor ciclice si desingularizarea lui Hironaka, teorema de injectivitate este o consecinţă directă a E_1-degenerării sirului spectral Hodge spre de Rham asociat unei varietăţi necompacte. Imbunătăţirile noastre la rezultatul original are câteva aplicaţii noi, de exemplu o teoremă de extensie de la locul de singularităţi ne-log canonice a unei varietăţi logaritmice. In particular, rezultă că pentru o varietate logaritmică de tip Calabi-Yau, locul de singularităţi ne-log canonice este conex.

Capitolul 5 prezintă rezultatele principale, anume teoremele de injectivitate Esnault-Viehweg şi Tankeev-Kollár, teorema de lipsă a torsiunii a lui Kollár, teorema de anulare Ohsawa-Kollár. Ele sunt demonstrate in categoria varietăţilor cu intersecţii normale generalizate, o clasă care conţine singularităţile cu intersecţii normale, şi care este conţinută in clasa singularităţilor n-wlc. Ideea principală este folosirea reziduurilor de codimensiune arbitrară, pentru a reduce teoremele de anulare la cazul logaritmic neted.

Bibliography

[1] Alexeev, V., *Complete moduli in the presence of semiabelian group action,* Ann. Math. **155** (2002), 611–708.

[2] Andreotti A., Bombieri E., *Sugli omeomorfismi delle varietà algebriche*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), **23** (1969), 431–450.

[3] Ambro F., *Quasi-log varieties*, in *Birational Geometry: Linear systems and finitely generated algebras: Collected papers.* Iskovskikh, V.A. and Shokurov, V.V. (Ed.), Proc. V.A. Steklov Inst. Math. 240 (2003), 220 – 239.

[4] Ambro, F., *Basic properties of log canonical centers,* in *Classification of Algebraic Varieties*, C. Faber, G. van der Geer, E. Looijenga (Ed.), EMS Series of Congress Reports, 2011, vol. 3, 38 – 48 (ISBN 978-3-03719-007-4).

[5] Ambro, F., *An injectivity theorem,* Compos. Math. **150**(6) (2014), 999–1023.

[6] Ambro, F., *Cyclic covers and toroidal embeddings,* in *Spitsbergen volume*, F. Bogomolov etal (Ed.), European J. Math. 2(1) (2016), 9 – 44.

[7] Ambro, F., *On toric face rings I,* to appear in *Edge volume, part II*, F. Bogomolov and I. Cheltsov (Ed.), European J. Math., 2018.

[8] Ambro, F., *On toric face rings II,* to appear in *Multigraded Algebra and Applications*, V. Ene and E. Miller (Ed.), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2018, ISBN-13: 978-3319904924.

[9] Ambro, F., *An injectivity theorem II.* preprint arXiv:1804.06337, 2018.

[10] Artin, M., *Algebraic approximation of structures over complete local rings.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **36** (1969), 23 – 58.

[11] Atiyah, M. F; Hodge, W. V. D, *Integrals of the second kind on an algebraic variety.* Ann. of Math. 62 (1955), 56–91.

[12] Bierstone, E.; Milman, P.D., *Resolution except for minimal singularities I.* Advances in Mathematics **231**(5) (2012), 3022 – 3053.

[13] Bruns, W.; Li, P.; Römer, T., *On seminormal monoid rings,* J. Algebra **302** (1) (2006), 361–386.

[14] Cox, D.; Little, J.; Schenck, H., Toric varieties, Graduate Studies in Mathematics **124** (2011).

[15] Danilov, V. I., *The geometry of toric varieties.* Uspekhi Mat. Nauk 33 (1978), no. 2(200), 85 – 134.

[16] Danilov, V. I., *De Rham complex on toroidal variety,* in LNM **1479** (1991), 26 – 38.

[17] Deligne, P., *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales.* Publ. Math. IHES 35 (1969), 107–126.

[18] Deligne P., *Equations differentielles a points singulieres regulieres.* LNM 163, Springer.

[19] Deligne P., *Théorie de Hodge II,* Publ. Math. IHES, 40 (1971), 5–57.

[20] Deligne P., *Théorie de Hodge III,* Publ. Math. IHES, 44 (1974), 5–77.

[21] Du Bois, P., Jarraud P., *Une propriété de commutation au changement de base des images directes supérieures de faisceaux structural*, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, **279** (1974), 745–747.

[22] Du Bois, P., *Complexe de de Rham filtré d'une variété singuliére*, Bull. Soc. math. France **109** (1981), 41–81.

[23] Esnault, H.; Viehweg, E., *Revêtements cycliques. II (autour du théoréme d'annulation de J. Kollár).* Géométrie algébrique et applications, II (La Rábida, 1984), pp. 81 – 96, Travaux en Cours, 23, Hermann, Paris, 1987.

[24] Esnault H., Viehweg E., *Logarithmic de Rham complexes and vanishing theorems*, Invent. Math. 86 (1) (1986), 161–194.

[25] Esnault, H.; Viehweg, E., *Lectures on vanishing theorems.* DMV Seminar, 20. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[26] Geraschenko, A.; Satriano, M., *Torus Quotients as Global Quotients by Finite Groups.* preprint arXiv:1201.4807 (2012).

[27] Grothendieck, A., *Eléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné): III. Étude cohomologique des faisceaux coherents, Premiére partie.* Publ. Math. IHES 11 (1961), 5–167.

[28] Grothendieck, A., *On the de Rham cohomology of algebraic varieties.* Publ. Math. l'I.H.E.S., 29 (1966), pp. 95–103.

[29] Goto, S; Suzuki, N.; Watanabe, K., *On affine semigroup rings.* Japan J. Math. (N.S.) **2** (1976) 1 – 12.

[30] Hochster, M., *Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes,* Ann. of Math. **96**(2) (1972), 318 – 337.

[31] Hochster, M; Roberts, J. L., *The purity of the Frobenius and local cohomology,* Adv. Math. **21** (1976) 117 – 172.

[32] Huber, A.; Jörder, C., *Differential forms in the h-topology.* Alg. Geom. **1**(4) (2014), 449 – 478.

[33] Ichim, B.; Römer, T., *On toric face rings.* Journal of Pure and Applied Algebra 210 (2007), 249 – 266.

[34] Ishida, M.-N., *Torus embeddings and dualizing complexes.* Tohoku Math. J., **32** (1980), 111–146.

[35] Ishida, M.-N., *Torus embeddings and de Rham complexes.* Commutative algebra and combinatorics (Kyoto, 1985), 111–145, Adv. Stud. Pure Math., 11, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[36] Kawakita, M., *Inversion of adjunction on log canonicity.* Invent. Math. **167**(1) (2007), 129 – 133.

[37] Kawamata,Y., *A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem,* Math. Ann. 261 (1) (1982), 43–46.

[38] Kawamata Y. *Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties.* Invent. Math. **79** (3) (1985), 567–588.

[39] Kempf, G.; Knudsen, F. F.; Mumford, D.; Saint-Donat, B., *Toroidal embeddings. I.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 339. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[40] Kodaira, K., *On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **39** (1953), 1268–1273.

[41] Kollár J., *Higher direct images of dualizing sheaves I,* Ann. of Math. (2) 123 (1986), 11–42.

[42] Kollár, J., *Shafarevich maps and automorphic forms.* M. B. Porter Lectures. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[43] Kollár, J., *Singularities of pairs.* Algebraic geometry, Santa Cruz 1995, 221 – 287, Proc. Sympos. Pure Math., 62, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[44] Kollár, J., *Singularities of the Minimal Model Program.* Cambridge Tracts in Mathematics 200 (2013).

[45] Kovács, S., *Du Bois pairs and vanishing theorems.* Kyoto J. Math. **51**(1) (2011), 47 – 69.

[46] Lang, S., *Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, 1971.

[47] Leahy J.V., Vitulli M.A., *Seminormal rings and weakly normal varieties*, Nagoya Math. J. **82** (1981), 27– 56.

[48] Miyaoka, Y., *On the Mumford-Ramanujam vanishing theorem on a surface.* Journées de Géometrie Algébrique d'Angers, Juillet 1979, pp. 239 – 247, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den RijnGermantown, Md., 1980.

[49] Mumford, D., *Pathologies III.* Amer. J. Math. **89**:1 (1967), 94–104.

[50] Nguyen, D.H., *Homological and combinatorial properties of toric face rings.* PhD. Thesis Fachbereich Mathematik/Informatik der Universität Osnabrück (2012).

[51] Oda, T., *Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 15. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[52] Peters, C. A. M.; Steenbrink, J. H. M., *Mixed Hodge Structures.* Ergebnisse der Mathematik **52** (2008), Springer-Verlag.

[53] Ramanujam, C. P., *Remarks on the Kodaira vanishing theorem,* J. Indian Math. Soc. (N.S.) (1972), no 1, 41 – 51.

[54] Ramanujam, C. P., *Supplement to the article [53].* J. Indian Math. Soc. (N.S.) 38 (1974), no. 1, 2, 3, 4, 121 – 124.

[55] Raynaud, M., *Contre-exemple au vanishing theorem en caractéristique $p > 0$,* C. P. Ramanujam—A tribute. Studies in Matematics 8, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1978), 273-278.

[56] Reid, M., *Young person's guide to canonical singularities*, Algebraic Geometry (Bowdoin,1985), Proc. Sympos. Pure Math. **46:1**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1987), 345–414.

[57] Serre, J.-P., *Faisceaux Algebriques Coherents.* Ann. Math., 2nd Ser., **61**:2 (1955), 197–278.

[58] Shokurov, V. V., *Three-dimensional log perestroikas.* Russian Acad. Sci. Izv. Math. 40 (1993), no. 1, 95-202.

[59] Shokurov, V. V., *Prelimiting flips.* in *Birational Geometry: Linear systems and finitely generated algebras: Collected papers.* Iskovskikh, V.A. and Shokurov, V.V. (Ed.), Proc. V.A. Steklov Inst. Math. 240:1 (2003), 75 – 213.

[60] Stanley, R.P., *Generalized h-vectors, intersection cohomology of toric varieties, and related results.* Commutative Algebra and Combinatorics, Adv. Stud. Pure Math. **11** (1987), 187 – 213.

[61] Steenbrink, J.H.M, *Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology,* in: Real and complex singularities, Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn (1977), 525 - 563.

[62] Tankeev, S. G., *On n-dimensional canonically polarized varieties and varieties of fundamental type*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 35 (1) (1971), 31-44.

[63] Steenbrink, J. H. M., *Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology.* Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976), pp. 525 – 563. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977.

[64] Terai, N., *Alexander duality in Stanley-Reisner rings,* Affine Algebraic Geometry, 449–462, Osaka Univ. Press, Osaka, 2007.

[65] Traverso C., *Seminormality and Picard group*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **24** (1970), 585–595.

[66] Viehweg, E., *Vanishing theorems.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 335 (1982), 1–8.

[67] Zariski, O., *Algebraic surfaces.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 3 (1935).

[68] Zariski, O.; Samuel, P., *Commutative algebra, vol II*, D. Van Nostrand Company (1960).

[69] Zariski, O., *An introduction to the theory of algebraic surfaces.* Lect. Notes in Math. **83** (1969).