ACADEMIA ROMÂNĂ
SCOSAAR

TEZĂ DE ABILITARE

Subvarietăți de curbură medie paralelă și subvarietăți biarmonice în varietăți riemanniene

Rezumat

Dorel Fetcu

Domeniul fundamental *Matematică și științe ale naturii*
Domeniul de abilitare *Matematică*

Teză elaborată în vederea obţinerii atestatului de abilitare în scopul conducerii lucrărilor de doctorat în domeniul *Matematică*

BUCUREŞTI, 2016

Rezumat

Un subiect, în acelaşi timp clasic şi actual, în geometria diferenţială de astăzi îl reprezintă studiul suprafeţelor de curbură medie constantă (suprafeţe cmc) în spaţii de dimensiune 3, şi deasemeni al cazului mai general al subvarietăţilor având câmpul vectorial curbură medie paralel în fibratul normal (subvarietăţi pmc) în spaţii de dimensiune oarecare. Primele studii de acest fel, consacrate suprafeţelor cmc, au apărut acum mai bine de 60 de ani, în timp ce subvarietăţile pmc au început să câştige interesul lumii matematice la începutul anilor 1970 odată cu apariţia unor articole ca [**35**] de B.-Y. Chen şi G. D. Ludden, [**52, 53**] ale lui J. Erbacher, [**58**] de D. Ferus, [**83**] de D. A. Hoffman, sau [**136**] de S.-T. Yau.

În continuare, vom trece rapid în revistă doar unele din acele rezultate care au reprezentat (şi încă o fac) o sursă de inspiraţie în activitatea noastră de cercetare. Două instrumente au fost folosite cu precădere în obţinerea acestor rezultate: diferenţialele olomorfe definite pe suprafaţe cmc (sau pmc) precum şi formulele de tip Simons.

H. Hopf [**85**] a folosit pentru prima oară o diferenţială olomorfă pentru a arăta că orice suprafaţă cmc homeomorfă cu o sferă în spaţiul euclidian 3-dimensional este de fapt o sferă euclidiană. Acest rezultat a fost extins de către S.-S. Chern [**41**] la cazul suprafeţelor cmc în forme spaţiale reale, pentru ca apoi să fie demonstrat pentru suprafeţe cmc în spaţii produs de tipul $M^2(c) \times \mathbb{R}$, unde $M^2(c)$ este o suprafaţă completă şi simplu conexă de curbură constantă c, ca şi pentru cele în Nil(3) şi $\widetilde{\mathrm{PSL}}(2, \mathbb{R})$, de către U. Abresch şi H. Rosenberg [**1, 2**].

În mod natural, următorul pas a fost trecerea la studiul suprafeţelor pmc în $M^n(c) \times \mathbb{R}$, unde $M^n(c)$ este o formă spaţială reală de curbură secţională constantă c, adică, al acelor suprafeţe care satisfac $\nabla^\perp H = 0$, unde $\nabla^\perp$ este conexiunea din fibratul normal, iar H câmpul vectorial curbură medie. Două din articolele importante dedicate acestui subiect sunt [**5, 6**] de H. Alencar, M. do Carmo, şi R. Tribuzy. În aceste articole autorii introduc o diferenţială olomorfă (care generalizează diferenţiala Abresch-Rosenberg definită în [**1**] pentru suprafeţe cmc în $M^2(c)\times\mathbb{R}$) şi o folosesc apoi în studiul geometriei unora dintre aceste suprafeţe. Unul dintre rezultatele principale din [**6**] este o teoremă de reducere a codimensiunii care arată că o suprafaţă pmc în $M^n(c)\times\mathbb{R}$ sau este minimală într-o hipersuprafaţă total umbilicală în $M^n(c)$; sau este o suprafaţă cmc într-o subvarietate 3-dimensională total umbilicală sau total geodezică în $M^n(c)$; sau stă în $M^4(c) \times \mathbb{R}$.

O altă metodă implicată cu real succes în studiul subvarietăţilor minimale şi, în general, al subvarietăţilor cmc şi pmc, este folosirea ecuaţiilor de tip Simons.

În 1968, J. Simons [**128**] a obţinut expresia laplacianului normei formei a doua fundamentale a unei subvarietăţi minimale într-o varietate riemanniană, pe care apoi a folosit-o în caracterizarea unora dintre aceste subvarietăţi în sfera euclidiană şi în spaţiul euclidian. Un an mai târziu, K. Nomizu şi B. Smyth [**112**] au generalizat această formulă în cazul hipersuprafeţelor cmc într-o formă spaţială reală, acest rezultat fiind generalizat la rândul lui, de către B. Smyth's [**129**], pentru subvarietăţi pmc într-o formă spaţială. De-a lungul anilor astfel de formule, numite astă zi ecuaţii de tip Simons, au fost folosite din ce în ce mai des în articolele dedicate subvarietăţilor cmc şi pmc (vezi, de exemplu, [**4, 7, 8, 16, 18, 28, 39, 123**]).

În ultimii 30 de ani s-a putut observa un interes din ce în ce mai ridicat în studierea unor ecuaţii cu derivate parţiale de ordin 4 care generalizează noţiunea de aplicaţii armonice.

Astfel, în influentul lor articol [**49**], J. Eells şi J. H. Sampson au sugerat noţiunea de aplicaţie biarmonică $\psi : M \to N$ între două varietăţi riemanniene, definită ca fiind un punct critic al funcţionalei bienergiei

$$E_2(\psi) = \int_M |\tau(\psi)|^2 dv,$$

unde $\tau(\psi) = \operatorname{trace} \nabla^{\psi} d\psi$ este câmpul tensiune al aplicaţiei ψ, ∇^{ψ} fiind conexiunea în fibratul $\psi^{-1}TM$. Dacă varietatea M nu este compactă, atunci aplicaţia $\psi : M \to N$ este, prin definiţie, biarmonică dacă este o soluţie a ecuaţiei Euler-Lagrange $\tau_2(\psi) = 0$, unde $\tau_2(\psi) = \Delta\tau(\psi) - \operatorname{trace} \bar{R}(d\psi, \tau(\psi))d\psi$ este câmpul bitensiune al lui ψ. Este uşor de văzut că orice aplicaţie armonică este biarmonică, acesta fiind motivul pentru care suntem interesaţi în studierea aplicaţiilor biarmonice care nu sunt armonice, numite aplicaţii propriu-biarmonice.

Un caz special este cel al imersiilor biarmonice, sau, altfel spus, al subvarietăţilor biarmonice, adică, al acelor subvarietăţi pentru care aplicaţia de incluziune este biarmonică. În spaţiul euclidian (şi doar în acest spaţiu), această definiţie a subvarietăţilor biarmonice coincide cu cea propusă de către B.-Y. Chen [**31**], care caracterizează aceste subvarietăţi prin faptul că au câmpul vectorial curbură medie armonic.

Deşi în spaţiul euclidian au fost obţinute doar rezultate care sugerează că nu există exemple de subvarietăţi propriu-biarmonice (vezi, de exemplu, [**34, 48, 91, 92, 106**]), în spaţii de curbură secţională diferită de zero, au fost găsite numeroase exemple şi demonstrate multe rezultate de clasificare a unor astfel de subvarietăţi, în articole cum ar fi [**12**]-[**14**], [**21**]-[**26**], [**44, 88, 100, 101, 104, 106**], [**117**]-[**119**], [**124**]-[**126**] şi [**139**].

Această teză este structurată în două părţi, prima, constând din două capitole, fiind dedicată subvarietăţilor pmc, în timp ce a doua, formată din trei capitole, are drept scop prezentarea rezultatelor obţinute în studiul subvarietăţilor biarmonice.

În primul capitol, prezentăm rezultate din [**62**], [**77**] şi [**78**] privind suprafeţele pmc în forme spaţiale complexe, cosimplectice şi respectiv sasakiene. În toate aceste situaţii demonstrăm teoreme de reducere a codimensiunii şi introducem diferenţiale olomorfe pe care le folosim în studierea geometriei unora dintre aceste suprafeţe.

Al doilea capitol este dedicat studiului subvarietăţilor pmc de dimensiune arbitrară în $M^n(c) \times \mathbb{R}$. Mai întâi demonstrăm două ecuaţii de tip Simons pe care apoi le folosim pentru a găsi rezultate de tip gap pentru astfel de subvarietăţi. Ne îndreptăm atenţia şi spre suprafeţele pmc având curbura totală finită şi demonstrăm o teoremă despre la compactitatea acestora. Capitolul se încheie cu un rezultat de clasificare a suprafeţelor pmc care fac un unghi constant cu ξ, câmpul vectorial unitar tangent la dreapta reală. Aceste rezultate au fost obţinute în [**17**], [**63**], [**72**], [**74**], [**75**] şi [**76**].

Începem prezentarea subvarietăţilor biarmonice în capitolul al treilea, construit pe articolele [**71**] şi [**72**]. Prezentăm mai întâi o teoremă de tip gap pentru subvarietăţi pmc propriu-biarmonice în $M^n(c) \times \mathbb{R}$ şi deasemeni clasificăm suprafeţele pmc propriu-biarmonice în acest spaţiu. Un alt subiect al acestui capitol îl reprezintă suprafeţele biconservative în $M^n(c) \times \mathbb{R}$, adică, acele suprafeţe pentru care partea tangentă a câmpului bitensiune se anulează (menţionăm că subvarietăţile biconservative au început să fie studiate foarte recent în articole cum ar fi [**27, 80, 107, 108**]). Aici, determinăm ecuaţia explicită a suprafeţelor pmc biconservative şi găsim exemple explicite de suprafeţe cmc biconservative în cazul când $n = 3$. Încheiem capitolul cu un rezultat privind compactitatea suprafeţelor pmc biconservative de curbură totală finită în varietăţi Hadamard.

În al patrulea capitol, studiem subvarietăţile biarmonice în forme spaţiale sasakiene şi obţinem atât rezultate de clasificare, cât şi exemple explicite, pentru curbe propriu-biarmonice, cilindri Hopf propriu-biarmonici peste hipersuprafeţe omogene reale în $\mathbb{C}P^n$ şi pentru subvarietăţi propriu-biarmonice integrale $\mathcal{C}$-paralele de dimensiune 3 într-o formă spaţială sasakiană 7-dimensională. Deasemeni, prezentăm o metodă prin care pot fi obţinute subvarietăţi biarmonice anti-invariante pornind de la subvarietăţi biarmonice integrale. Rezultatele cuprinse în acest capitol au apărut în [**59**], [**60**], [**61**] şi [**65**]-[**70**].

Subvarietăţile biarmonice în forme spaţiale complexe sunt studiate în ultimul capitol al tezei. Mai întâi prezentăm unele rezultate generale cu privire la biarmonicitatea unor clase speciale de subvarietăţi în aceste spaţii. Continuăm cu o formulă de legătură între câmpurile bitensiune ale unei subvarietăţi în $\mathbb{C}P^n$ şi cilindrului Hopf corespunzător în $\mathbb{S}^{2n+1}$. În continuare, caracterizăm subvarietăţile de tip Clifford propriu-biarmonice în $\mathbb{C}P^n$, iar în ultima parte a capitolului clasificăm curbele propriu-biarmonice şi suprafeţele pmc propriu-biarmonice în $\mathbb{C}P^n$ şi deasemeni subvarietăţile propriu-biarmonice lagrangiene paralele 3-dimensionale în $\mathbb{C}P^3$. Acest capitol conţine rezultate obţinute în [**64**], [**70**] şi [**73**].

Bibliography

[1] U. Abresch and H. Rosenberg, *A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Acta Math. 193 (2004), 141–174.

[2] U. Abresch and H. Rosenberg, *Generalized Hopf differentials*, Mat. Contemp. 28 (2005), 1–28.

[3] P. Alegre, D. E. Blair, and A. Carriazo, *Generalized Sasakian space forms*, Israel J. Math. 141 (2004), 157–183.

[4] H. Alencar and M. do Carmo, *Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994), 1223–1229.

[5] H. Alencar, M. do Carmo, and R. Tribuzy, *A theorem of Hopf and the Cauchy-Riemann inequality*, Comm. Anal. Geom. 15 (2007), 283–298.

[6] H. Alencar, M. do Carmo, and R. Tribuzy, *A Hopf Theorem for ambient spaces of dimensions higher than three*, J. Differential Geometry 84 (2010), 1–17.

[7] L. J. Alías and S. C. García-Martínez, *On the scalar curvature of constant mean curvature hypersurfaces in space forms*, J. Math. Anal. Appl. 363 (2010), 579–587.

[8] K. O. Araújo and K. Tenenblat, *On submanifolds with parallel mean curvature vector*, Kodai Math. J. 32 (2009), 59–76.

[9] C. Baikoussis, D. E. Blair, and T. Koufogiorgos, *Integral submanifolds of Sasakian space forms* $\bar{M}^7$, Results Math. 27 (1995), 207–226.

[10] P. Baird and J. Eells, *A conservation law for harmonic maps*, Geometry Symposium, Utrecht 1980, 1–25, Lecture Notes in Math. 894, Springer, Berlin-New York, 1981.

[11] A. Balmuş, S. Montaldo, and C. Oniciuc, *Classification results for biharmonic submanifolds in spheres*, Israel J. Math. 168 (2008), 201–220.

[12] A. Balmuş, S. Montaldo, and C. Oniciuc, *Properties of biharmonic submanifolds in spheres*, J. Geom. Symmetry Phys. 17 (2010), 87–102.

[13] A. Balmuş, S. Montaldo, and C. Oniciuc, *Biharmonic hypersurfaces in* 4*-dimensional space forms*, Math. Nachr. 283 (2010), 1696–1705.

[14] A. Balmuş, S. Montaldo, and C. Oniciuc, *Biharmonic PNMC submanifolds in spheres*, Ark. Mat. 51 (2013), 197–221.

[15] A. Balmuş and C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds with parallel mean curvature vector field in spheres*, J. Math. Anal. Appl. 386 (2012), 619–630.

[16] M. H. Batista da Silva, *Simons type equation in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ *and applications*, Ann. Inst. Fourier 61 (2011), 1299–1322.

[17] M. Batista, M. P. Cavalcante, and D. Fetcu, *Constant mean curvature surfaces in* $\mathbb{M}^2(c) \times \mathbb{R}$ *and finite total curvature*, `arXiv:1402.1231`, preprint 2014.

[18] P. Bérard, M. do Carmo, and W. Santos, *Complete hypersurfaces with constant mean curvature and finite total curvature*, Ann. Global Anal. Geom. 16 (1998), 273–290.

[19] D. E. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Birkhäuser Boston, Progress in Mathematics, 203, 2002.

[20] D. E. Blair and S. I. Goldberg, *Topology of almost contact manifolds*, J. Differential Geometry 1 (1967), 347–354.

[21] R. Caddeo, S. Montaldo, and C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds of* $\mathbb{S}^3$, Internat. J. Math. 12 (2001), 867–876.

[22] R. Caddeo, S. Montaldo, and C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds in spheres*, Israel J. Math. 130 (2002), 109–123.

[23] R. Caddeo, S. Montaldo, and P. Piu, *Biharmonic curves in a surface*, Rend. Mat. Appl. 21 (2001), 143–157.

[24] R. Caddeo, C. Oniciuc, and P. Piu, *Explicit formulas for non-geodesic biharmonic curves of the Heisenberg group*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 62 (2004), 265–278.

[25] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, and P. Piu, *The clasification of biharmonic curves of Cartan-Vrânceanu 3-dimensional spaces*, Modern trends in geometry and topology, 121–131, Cluj Univ. Press, Cluj-Napoca, 2006.

[26] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, and P. Piu, *The Euler-Lagrange method for biharmonic curves*, Mediterr. J. Math. 3 (2006), 449–465.

[27] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, and P. Piu, *Surfaces in three-dimensional space forms with divergence-free stress-bienergy tensor*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 193 (2014), 529–550.

[28] M. do Carmo, L.-F. Cheung, and W. Santos, *On the compactness of constant mean curvature hypersurfaces with finite total curvature*, Arch. Math. (Basel) 73 (1999), 216–222.

[29] I. Castro, C. R. Montealegre, and F. Urbano, *Minimal Lagrangian submanifolds in the complex hyperbolic space*, Illinois J. Math. 46 (2002), 695–721.

[30] B.-Y. Chen, *Minimal hypersurfaces of an m-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1971), 375–380.

[31] B.-Y. Chen, *A report on submanifolds of finite type*, Soochow J. Math. 22 (1996), 117–337.

[32] B.-Y. Chen, *Special slant surfaces and a basic inequality*, Results Math. 33 (1998), 65–78.

[33] D. Chen, G. Chen, H. Chen, and F. Dillen, *Constant angle surfaces in $\mathbb{S}^3(1) \times \mathbb{R}$*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 19 (2012), 289–304.

[34] B.-Y. Chen and S. Ishikawa, *Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidian spaces*, Kyushu J. Math. 52 (1998), 167–185.

[35] B.-Y. Chen and G. D. Ludden, *Surfaces with mean curvature vector parallel in the normal bundle*, Nagoya Math. J. 47 (1972), 161–167.

[36] B.-Y. Chen and K. Ogiue, *On totally real submanifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 193 (1974), 257–266.

[37] B.-Y. Chen and M. Okumura, *Scalar curvature, inequality and submanifold*, Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973), 605–608.

[38] B.-Y. Chen and K. Yano, *Pseudo-umbilical submanifolds in a Riemannian manifold of constant curvature*, Differential geometry (in honor of Kentaro Yano), Kinokuniya, Tokyo, 1972, 61–71.

[39] Q.-M. Cheng and K. Nonaka, *Complete submanifolds in Euclidean spaces with parallel mean curvature vector*, Manuscripta Math. 105 (2001), 353–366.

[40] S.-Y. Cheng and S.-T. Yau, *Hypersurfaces with constant scalar curvature*, Math. Ann. 225 (1977), 195–204.

[41] S.-S. Chern, *On surfaces of constant mean curvature in a three-dimensional space of constant curvature*, Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981), Lecture Notes in Math. 1007, Springer, Berlin, 1983, 104–108.

[42] S.-S. Chern and J. Wolfson, *Minimal surfaces by moving frames*, Amer. J. Math 105 (1983), 59–83.

[43] D. Chinea, M. de León, and J. C. Marrero, *Topology of cosymplectic manifolds*, J. Math. Pures Appl. 72 (1993), 567–591.

[44] J. T. Cho, J. Inoguchi, and J.-E. Lee, *Biharmonic curves in 3-dimensional Sasakian space form*, Ann. Math. Pura Appl. 186 (2007), 685–701.

[45] T. H. Colding and W.P. Minicozzi II, *Estimates for parametric elliptic integrands*, Int. Math. Res. Not. 2002 (6), 291–297.

[46] T. H. Colding and W. P. Minicozzi II, *A course in minimal surfaces*, American Mathematical Society, Providence, RI, Graduate Studies in Mathematics 121, 2011.

[47] F. Dillen and L. Vrancken, *C-totally real submanifolds of $\mathbb{S}^7(1)$ with non-negative sectional curvature*, Math. J. Okayama Univ. 31 (1989), 227–242.

[48] I. Dimitric, *Submanifolds of $\mathbb{E}^m$ with harmonic mean curvature vector*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 20 (1992), 53–65.

[49] J. Eells and J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 86 (1964), 109–160.

[50] J. Eells and L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, Conf. Board. Math. Sci. 50 (1983).

[51] H. Endo, *A note on invariant submanifolds in an almost cosymplectic manifold*, Tensor (N.S.) 43 (1986), 75–78.

[52] J. Erbacher, *Isometric immersions of constant mean curvature and triviality of the normal connection*, Nagoya Math. J. 45 (1971), 139–165.

[53] J. Erbacher, *Reduction of the codimension of an isometric immersion*, J. Differential Geometry 5 (1971), 333–340.

[54] J. H. Eschenburg and R. Tribuzy, *Existence and uniqueness of maps into affine homogeneous spaces*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 89 (1993), 11–18.

[55] R. H. Escobales, *Riemannian submersions from complex projective space*, J. Differential Geom. 13 (1978), 93–107.

[56] J. M. Espinar and H. Rosenberg, *Complete constant mean curvature surfaces in homogeneous spaces*, Comment. Math. Helv. 86 (2011), 659–674.

[57] M. J. Ferreira and R. Tribuzy, *Parallel mean curvature surfaces in symmetric spaces*, Ark. Mat. 52 (2014), 93–98.

[58] D. Ferus, *The torsion form of submanifolds in* E^N, Math. Ann. 193 (1971), 114–120.

[59] D. Fetcu, *Integral submanifolds in three-Sasakian manifolds whose mean curvature vector fields are eigenvectors of the Laplace operator*, Geometry, integrability and quantization, 210–223, Softex, Sofia, 2008.

[60] D. Fetcu, *Biharmonic Legendre curves in Sasakian space forms*, J. Korean Math. Soc. 45 (2008), 393–404.

[61] D. Fetcu, *A note on biharmonic curves in Sasakian space forms*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 189 (2010), 591–603.

[62] D. Fetcu, *Surfaces with parallel mean curvature vector in complex space forms*, J. Differential Geom. 91 (2012), 215–232.

[63] D. Fetcu, *A classification result for helix surfaces with parallel mean curvature in product spaces*, Ark. Mat. 53 (2015), 249–258.

[64] D. Fetcu, E. Loubeau, S. Montaldo, and C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds of* $\mathbb{C}P^n$, Math. Z. 266 (2010), 505–531.

[65] D. Fetcu and C. Oniciuc, *Explicit formulas for biharmonic submanifolds in non-Euclidean* 3-*spheres*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 77 (2007), 179–190.

[66] D. Fetcu and C. Oniciuc, *On the geometry of biharmonic submanifolds in Sasakian space forms*, J. Geom. Symmetry Phys. 14 (2009), 21–34.

[67] D. Fetcu and C. Oniciuc, *Biharmonic hypersurfaces in Sasakian space forms*, Differential Geom. Appl. 27 (2009), 713–722.

[68] D. Fetcu and C. Oniciuc, *Explicit formulas for biharmonic submanifolds in Sasakian space forms*, Pacific J. Math. 240 (2009), 85–107.

[69] D. Fetcu and C. Oniciuc, *A note on integral* C*-parallel submanifolds in* $\mathbb{S}^7(c)$, Rev. Un. Mat. Argentina 52 (2011), 33–45.

[70] D. Fetcu and C. Oniciuc, *Biharmonic integral* $\mathcal{C}$*-parallel submanifolds in* 7*-dimensional Sasakian space forms*, Tohoku Math. J. 64 (2012), 195–222.

[71] D. Fetcu, C. Oniciuc, and A. L. Pinheiro, *CMC biconservative surfaces in* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, J. Math. Anal. Appl. 425 (2015), 588–609.

[72] D. Fetcu, C. Oniciuc, and H. Rosenberg, *Biharmonic submanifolds with parallel mean curvature in* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, J. Geom. Anal. 23 (2013), 2158–2176.

[73] D. Fetcu and A. L. Pinheiro, *Biharmonic surfaces with parallel mean curvature in complex space forms*, Kyoto J. Math. 55 (2015), 837–855.

[74] D. Fetcu and H. Rosenberg, *A note on surfaces with parallel mean curvature*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 349 (2011), 1195–1197.

[75] D. Fetcu and H. Rosenberg, *Surfaces with parallel mean curvature in* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$, Michigan Math. J. 61 (2012), 715–729.

[76] D. Fetcu and H. Rosenberg, *On complete submanifolds with parallel mean curvature in product spaces*, Rev. Mat. Iberoam. 29 (2013), 1283–1306.

[77] D. Fetcu and H. Rosenberg, *Surfaces with parallel mean curvature in* $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{C}H^n \times \mathbb{R}$, Trans. Amer. Math. Soc. 366 (2014), 75–94.

[78] D. Fetcu and H. Rosenberg, *Surfaces with parallel mean curvature in Sasakian space forms*, Math. Ann. 362 (2015), 501–528.

[79] K. R. Frensel, *Stable complete surfaces with constant mean curvature*, Bol. Soc. Bras. Mat. 27 (1996), 129–144.

[80] Y. Fu, *Explicit classification of biconservative surfaces in Lorentz* 3*-space forms*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 194 (2015), 805–822.

[81] S. Hirakawa, *Constant Gaussian curvature surfaces with parallel mean curvature vector in two-dimensional complex space forms*, Geom. Dedicata 118 (2006), 229–244.
[82] D. Hilbert, *Die grundlagen der physik*, Math. Ann. 92 (1924), 1–32.
[83] D. A. Hoffman, *Surfaces of constant mean curvature in manifolds of constant curvature*, J. Differential Geom. 8 (1973), 161–176.
[84] D. Hoffman and J. Spruck, *Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds*, Comm. Pure. Appl. Math. 27 (1974), 715–727.
[85] H. Hopf, *Differential geometry in the large*, Lecture Notes in Math. 1000, Springer-Verlag, 1983.
[86] W. Y. Hsiang and H. B. Lawson, *Minimal submanifolds of low cohomogeneity*, J. Differential Geometry 5 (1971), 1–38.
[87] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv. 32 (1957), 13–71.
[88] T. Ichiyama, J. Inoguchi, and H. Urakawa, *Bi-harmonic maps and bi-Yang-Mills fields*, Note Mat. 28 (2009), suppl. 1, 233–275.
[89] J. Inoguchi, *Submanifolds with harmonic mean curvature in contact* 3*-manifolds*, Colloq. Math. 100 (2004), 163–179.
[90] I. Ishihara, *Anti-invariant submanifolds of a Sasakian space form*, Kodai Math. J. 2 (1979), 171–186.
[91] G. Y. Jiang, 2*-harmonic maps and their first and second variational formulas*, Chinese Ann. Math. Ser. A7(4) (1986), 389–402.
[92] G. Y. Jiang, *The conservation law for* 2*-harmonic maps between Riemannian manifolds*, Acta Math. Sinica 30 (1987), 220–225.
[93] G. Y. Jiang, 2*-harmonic maps and their first and second variational formulas. Translated from the Chinese by Hajime Urakawa*, Note Mat. 28 (2008), suppl. 1, 209–232.
[94] K. Kenmotsu and D. Zhou, *The classification of the surfaces with parallel mean curvature vector in two-dimensional complex space forms*, Amer. J. Math. 122 (2000), 295–317.
[95] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol. I, Interscience Publishers, New York, London, 1963.
[96] H. B. Lawson, *Rigidity theorems in rank-*1 *symmetric spaces*, J. Differential Geometry 4 (1970), 349–357.
[97] A.-M. Li and J. M. Li, *An intrinsic rigidity theorem for minimal submanifolds in a sphere*, Arch. Math. 58 (1992), 582–594.
[98] J. H. Lira, R. Tojeiro, and F. Vitório, *A Bonnet theorem for isometric immersions into products of space forms*, Arch. Math. (Basel) 95 (2010), 469–479.
[99] A. Lotta, *Slant submanifolds in contact geometry*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) 39 (1996), 183-198.
[100] E. Loubeau, S. Montaldo, and C. Oniciuc, *The stress-energy tensor for biharmonic maps*, Math. Z. 259 (2008), 503–524.
[101] E. Loubeau and C. Oniciuc, *Biharmonic surfaces of constant mean curvature*, Pacific J. Math. 271 (2014), 213–230.
[102] S. Maeda and T. Adachi, *Holomorphic helices in a complex space form*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 1197–1202.
[103] S. Maeda and Y. Ohnita, *Helical geodesic immersions into complex space forms*, Geom. Dedicata 30 (1989), 93–114.
[104] S. Maeta and H. Urakawa, *Biharmonic Lagrangian submanifolds in Kähler manifolds*, Glasg. Math. J. 55 (2013), 465–480.
[105] W. H. Meeks and J. Pérez, *Constant mean curvature surfaces in metric Lie groups*, Geometric analysis: partial differential equations and surfaces, 25–110, Contemp. Math., 570, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.
[106] S. Montaldo and C. Oniciuc, *A short survey on biharmonic maps between Riemannian manifolds*, Rev. Un. Mat. Argentina 47 (2006), 1–22.
[107] S. Montaldo, C. Oniciuc, and A. Ratto, *Proper biconservative immersions into the Euclidean space*, Ann. Mat. Pura Appl. 195 (2016), 403–422.
[108] S. Montaldo, C. Oniciuc, and A. Ratto, *Biconservative surfaces*, J. Geom. Anal. 26 (2016), 313–329.

[109] H. Naitoh, *Parallel submanifolds of complex space forms I*, Nagoya Math. J. 90 (1983), 85–117.
[110] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Pure and Applied Mathematics 103, Academic Press, New York, 1983.
[111] R. Niebergall and P. J. Ryan, *Real hypersurfaces in complex space forms*, Tight and Taut Submanifolds, MSRI Publications 32 (1997), 233–305.
[112] K. Nomizu and B. Smyth, *A formula of Simons' type and hypersurfaces with constant mean curvature*, J. Differential Geometry 3 (1969), 367–377.
[113] T. Ogata, *Surfaces with parallel mean curvature vector in $P^2(C)$*, Kodai Math. J. 18 (1995), 397–407.
[114] T. Ogata, *Curvature pinching theorem for minimal surfaces with constant Kähler angle in complex projective spaces*, Tôhoku Math. J. 43 (1991), 361–374.
[115] M. Okumura, *Some remarks on space with a certain contact structure*, Tôhoku Math. J. 14 (1962), 135–145.
[116] M. Okumura, *Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor*, Amer. J. Math. 96 (1974), 207–213.
[117] Y. L. Ou, *On conformal biharmonic immersions*, Ann. Global Anal. Geom. 36 (2009), 133–142.
[118] Y.-L. Ou, *Biharmonic hypersurfaces in Riemannian manifolds*, Pacific J. Math. 248 (2010), 217–232.
[119] Y.-L. Ou and Z.-P. Wang, *Constant mean curvature and totally umbilical biharmonic surfaces in 3-dimensional geometries*, J. Geom. Phys. 61 (2011), 1845–1853.
[120] H. Reckziegel, *Horizontal lifts of isometric immersions into the bundle space of a pseudo-Riemannian submersion*, Global differential geometry and global analysis 1984 (Berlin, 1984), 264–279, Lecture Notes in Math., 1156, Springer, Berlin, 1985.
[121] G. Ruiz-Hernández, *Minimal helix surfaces in $N^n \times \mathbb{R}$*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 81 (2011), 55–67.
[122] A. Sanini, *Applicazioni tra varietà riemanniane con energia critica rispetto a deformazioni di metriche*, Rend. Mat. 3 (1983), 53–63.
[123] W. Santos, *Submanifolds with parallel mean curvature vector in spheres*, Tôhoku Math. J. 46 (1994), 403–415.
[124] T. Sasahara, *Submanifolds in a Sasakian manifold $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$ whose ϕ-mean curvature vectors are eigenvectors*, J. Geom. 75 (2002), 166–178.
[125] T. Sasahara, *Legendre surfaces in Sasakian space forms whose mean curvature vectors are eigenvectors*, Publ. Math. Debrecen 67 (2005), 285–303.
[126] T. Sasahara, *Biharmonic Lagrangian surfaces of constant mean curvature in complex space forms*, Glasg. Math. J. 49 (2007), 497–507.
[127] N. Sato, *Totally real submanifolds of a complex space form with nonzero parallel mean curvature vector*, Yokohama Math. J. 44 (1997), 1–4.
[128] J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. (2) 88 (1968), 62–105.
[129] B. Smyth, *Submanifolds of constant mean curvature*, Math. Ann 205 (1973), 265–280.
[130] R. Takagi, *On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space*, Osaka J. Math. 10 (1973), 495–506.
[131] T. Takahashi, *Sasakian ϕ-symmetric spaces*, Tôhoku Math. J. 29 (1977), 91–113.
[132] S. Tanno, *Sasakian manifolds with constant φ-holomorphic sectional curvature*, Tôhoku Math. J. 21 (1969), 501–507.
[133] S. Tanno, *The topology of contact Riemannian manifolds*, Ill. J. Math. 12 (1968), 700–717.
[134] R. Tribuzy, *Hopf's method and deformations of surfaces preserving mean curvature*, An. Acad. Brasil. Cienc. 50 (1978), 447–450.
[135] K. Yano and M. Kon, *Structures on Manifolds*, Series in Pure Mathematics 3, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984.
[136] S.-T. Yau, *Submanifolds with constant mean curvature. I*, Amer. J. Math. 96 (1974), 346–366.
[137] S.-T. Yau, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Commun. Pure. Appl. Math. 28 (1975), 201–228.
[138] B. White, *Complete surfaces of finite total curvature*, J. Differential Geom. 26 (1987), 315–326.
[139] W. Zhang, *New examples of biharmonic submanifolds in $\mathbb{C}P^n$ and $\mathbb{S}^{2n+1}$*, An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.) 57 (2011), 207–218.